Klaus Rödler (2016)

Das Einmaleins als gemeinsamer Gegenstand

Wenn man den Anspruch hat, inklusiven Unterricht am ‚gemeinsamen Gegenstand' zu gestalten, also nicht in der Form parallel laufender Lehrgänge umzusetzen, dann scheinen die Multiplikation und die Division hierfür nicht geeignet zu sein. Die Automatisierung des 1x1 und das Berechnen von Divisionen bereitet schließlich bereits vielen Kindern aus dem Regelbereich ernsthafte Schwierigkeiten. Bei diesem Thema scheint ein differenziertes Vorgehen unvermeidlich.

Unterschiedliche Arbeitsaufträge müssen manchmal sein. Aber sie sollten als Notlösung betrachtet werden. Besser bleibt es, die Kinder arbeiten an gemeinsamen Arbeitsaufträgen. Nur dann bauen alle Kinder das Selbstbewusstsein auf, in ihrer Art und mit ihrem Können wirklich gleichberechtigt zu sein. ‚Es ist normal , verschieden zu sein. Wichtiger aber ist es, normal zu sein, also keine Sonderrolle zu spielen. Jede Sonderrolle untergräbt das Selbstwertgefühl des Kindes. Deshalb ist es so wichtig auch für die beiden im Unterricht wichtigen Operationen der Multiplikation und Division eine Form zu finden, bei der sich alle Kinder in einem gemeinsamen Geschehen am gemeinsamen Gegenstand erleben.

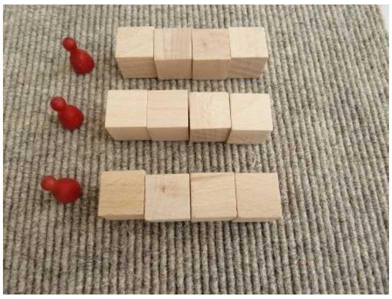
1. <u>Inklusiver Einstieg in Multiplikation und Division</u>

Die Arbeit am gemeinsamen Gegenstand scheitert oft an einem Missverständnis. Damit auch die Leistungsschwächeren *‚es'* verstehen, glaubt man, die Dinge einfach machen zu müssen. Dieser Weg spaltet die Klasse jedoch zwangsläufig in diejenigen, die *‚es' schon können* oder zumindest schnell verstehen und jene, *die ‚es' nicht blicken*. Diese Kinder bekommen entweder einen Helfer an die Seite oder noch einfachere Aufgaben, was zu einer immer weitergehenden Ausdifferenzierung des Klassenlebens führt. Dieser typischen Entwicklung kann vorgebeugt werden, wenn im Gegenteil Aufgaben ins Spiel gebracht werden, die allen Kindern unbekannt und die hinreichend komplex sind, so dass alle Kinder einer sie fordernden Situation ausgesetzt sind: Nur was *alle* fordert, rückt alle in die gleiche Position. Nur an einem komplexen Problem ist *Selbstdifferenzierung* möglich, welche die Differenzierung des Unterrichtsgeschehens ersetzt. (Siehe auch Ratgeber (2016a), S. 19-43)

Auf das genannte Thema bezogen heißt das, dass Multiplikakation und Division zu einem viel früheren Zeitpunkt, nämlich schon in den ersten Wochen des 1. Schuljahres eingebracht werden. Genauer: Sie bilden den Einstieg ins Rechnen!

Wenn Sie mit der Aufgabe 3+4=__ ins Rechnen einsteigen, dürfen Sie sich nicht wundern, wenn Sie zwischen den Kindern differenzieren müssen. Beginnen Sie aber mit der Aufgabe 3·4 =, so ist es extrem unwahrscheinlich, dass ein Kind Ihrer Klasse ruft: „Das kann schon. Das gibt 12!“ Sie haben also etwas für alle Kinder gemeinsam Neues und Herausforderndes.

Abb.1: 3·4=12 auf dem Rechenteppich



Dieser Einstieg erfolgt ganz praktisch. Die an die Tafel geschriebene Aufgabe 3·4 = wird vorgelesen und deren Bedeutung praktisch vorgespielt. Drei Kinder holen sich je 4 Holzwürfel, die in der ersten Klasse als zentrales Rechenmittel fungieren. (2016a, S. 75f.) „Dreimal Vier, das bedeutet ‚Vier und nochmal Vier und nochmal Vier‘. Gemeinsam abzählend wird die Lösung 12 gefunden und an die Tafel geschrieben. Dieses Geschehen wird dann auf den *‚Rechenteppich‘* übertragen und analog nachgestellt, wobei die Kinder durch Halmakegel repräsentiert werden. (Abb.1) Dabei sollten Sie die Rechenhandlungen der Kinder am OHV für alle sichtbar mitvollziehen, bis diese Lösungshandlung bei der Mehrheit gesichert ist. Nun können die Kinder ein Arbeitsblatt mit Multiplikationen (bis höchstens 4·4) partnerweise oder auch alleine selbständig bearbeiten.

Kinder, deren Kenntnis der Zahlwortreihe und der Zahlzeichen noch zu gering ist, bekommen eine Zuordnungstabelle (Abb. 2) an die Hand, mit deren Hilfe die Aufgabe auf den Teppich übertragen werden kann und auch das Zahlzeichen der Lösung ermittelt wird. (in: Materialband 1/2016b, S. 66) Ganz wie bei einer Anlauttabelle malen die Kinder die ihnen noch unbekannten Zeichen ab und lernen sie diese im Gebrauch kennen.

Abb. 2: Die Zahlzeichentabelle

■																			
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19

Ist die Multiplikation auf diese Weise bekannt gemacht, wird die Division in der Logik des Verteilens ebenso eingeführt. Nachdem das Verteilen von 12 Würfeln an 3 Kinder als konkrete Handlung durchgeführt wurde, wird das Geschehen wieder auf den Rechenteppich übertragen. Auch hier zeigt sich, dass die Operation als Handlung keinerlei Schwierigkeiten macht. Genau genommen geht es hier auch noch gar nicht um die Multiplikation und Division. Im Blick auf die leistungsschwächeren Kinder ist es eine Übung, die sie mit den Zahlzeichen bis 20 und mit dem kardinalen Gehalt der Zahlen bis 4 vertraut macht.

Dennoch werden hier auch von diesen Kindern wichtige Grunderfahrungen gemacht, die ihnen im 2. Schuljahr helfen, am Einstieg ins 1x1-Training verständig einzusteigen.

- *Die Aufgabe 3·4= erzeugt die gleiche Lösung wie die Aufgabe 4·3 =.* Diese Tatsache, dass Tauschaufgaben bei der Multiplikation die gleiche Lösung erzeugen kann ganz praktisch sichtbar gemacht werden, indem man die Würfel enger und zu einem Rechteck legt. Beide Aufgaben erzeugen das gleiche Rechteck.)

- *Die Schlussstellung der Division 12:3= entspricht der Anfangsstellung der Multiplikation3·4 =.* Das bedeutet für das Rechnen, dass sich Division aus der Kenntnis der Multiplikation heraus lösen lassen. (12:3=4, weil 3·4/4·3 = 12)

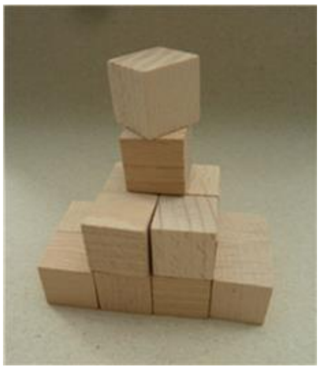
Das und die Kenntnis wichtiger wahrnehmbarer Rechteckmuster wie 2·3=4 oder 2·3 =6 hilft deutlich, wenn es im 2. Schuljahr darum geht, ins Einmaleins einzusteigen.

2. <u>Zählanlässe und die Arbeit mit ‚Gebäuden'</u>

Parallel zu diesem ersten Rechnen wird gezählt, wobei zählen, damit es ein gemeinsamer Gegenstand bleiben kann, die analoge Abbildung einer Anzahl in Holzwürfel meint. In Abb.3 wurden die Tische der Klasse mit Holzwürfeln gezählt. *„So viele Tische.-So viele Würfel."* Auf diese Weise entstehen *‚konkrete Zahlen'*, die allein durch die Wahrnehmung erfasst und unterschieden werden können, deren Interpretation also nicht an Zahlvorkenntnisse gebunden ist (2016a, S. 60ff.). Das Konzept der kardinalen Zahl wird damit von zwei Seiten, der Rechenhandlung und der der Zahlbildung, aufgebaut.

Als dritte Säule entsteht aus der Diskussion der in *‚Gebäuden'* dargestellten Zählergebnisse ein weiteres gemeinsames Tätigkeitsfeld, das die Multiplikation in ein neues Licht rückt und zugleich die Zeichensprache der Mathematik festigt: Wenn man sichtbare Rechtecke durch Multiplikationen benennt, so lässt sich das Gebäude in Abb. 3 als 2·4 + 2·2 + 1 + 1 beschreiben. Gesprochene Sätze („Unten liegen zweimal vier Würfel, darauf zweimal zwei und dann einer und noch einer.") lassen sich mit mathematischen Zeichen in Schrift übersetzen. Gebäude lassen sich mit Termen beschreiben und Terme lassen sich als Bauanleitung für Gebäude interpretieren. (2016b, S. 16, 28-40)

<u>*Abb. 3:*</u> *So viele Tische in der Klasse*



Es sind 2·4 + 2·2 + 1 + 1 Würfel.

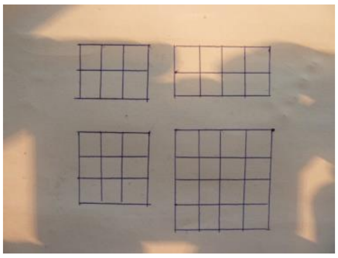
Auf der Grundlage der drei Säulen dringen alle Kinder Anfang der ersten Klasse gemeinsam in die Sprache und die Zeichen der Mathematik ein und lernen nebenher wesentliche operative Phänomene (Multiplikation und Division sind Gegenoperationen, Tauschaufgaben haben bei der Multiplikation die gleiche Lösung, das gilt nicht bei der Division) kennen. Außerdem bauen sie, und das ist für den nachfolgenden Einstieg in die Subtraktion von zentraler Bedeutung, kardinale Vorstellungen der Zahlbausteine 1, 2, 3 und 4 auf, was die Grundlage dafür ist, dass Subtraktionen und Additionen nicht mehr abzählend, sondern auf der Grundlage des Teile-Ganzes-Prinzip genutzt werden können. (2016a, S.73f. und 2016b)

3. Inklusive Einführung ins Einmaleins

Wenn die Einführung ins Einmaleins ein gemeinsamer Gegenstand sein soll, so darf sie nur wenig abstraktes Zahlwissen voraussetzen. Gleichzeitig muss der Einstieg so breit sein, dass er auch für leistungsstärkere Schüler interessant ist. Dies gelingt, wenn man sich dem Einmaleins nicht über die Reihen nähert, sondern geometrisch, nämlich über die Zahl der Karos im rechteckigen Karofeld. Der geometrische Einstieg erlaubt es, unmittelbar ins gesamte Einmaleins einzusteigen, ja sogar Aufgaben bis 14·14 = zu behandeln, gleichzeitig jedoch auf der Basis eines geringen Zahlwissens zu arbeiten und dabei nebenher den zwei- und dreistelligen Zahlenraum strukturell aufzubauen. (2016a. S. 94ff. und Materialband 4/2016c)

Wie schon erwähnt, lässt sich jede rechteckige Anordnung durch eine Multiplikation beschreiben und jede Multiplikation als Rechteck darstellen. Die Anzahl der Kästchen in einem rechteckigen Karo-Feld korrespondiert exakt mit der zugehörigen Aufgabe. (Abb. 4) Ist dabei keine Seite länger als 4 Kästchen, so bewegen wir uns im protoquantitativ wahrnehmbaren Bereich. Das heißt, die Gleichheit oder Unterschiedlichkeit der Rechtecke lässt sich ebenso ohne Zählprozess feststellen wie die Anzahl der Kästchen auf einer Seite. Diese Rechtecke wiederholen also die zentralen Zahlbausteine 1-4.

<u>Abb. 4</u>: Geometrischer Einstieg



2·3 =6 2·4 =8

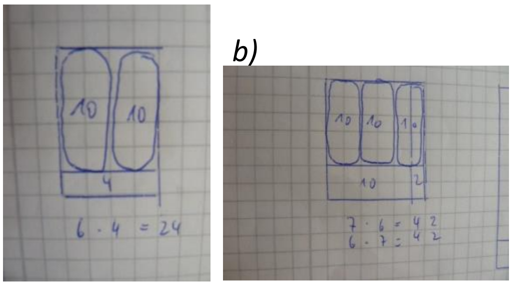
3·3 =9 4·4 =16

Die Bestimmung der Lösung erfolgt abzählend. Leistungsstärkere Schüler werden wichtige Ergebniszahlen dabei bald automatisiert haben. Alle Kinder bemerken aufgrund der Anschauung schnell, dass Tauschaufgaben das Rechteck ´nur drehen und daher die gleiche Lösung besitzen.

Wenn die Tatsache des geometrischen Lösens durch zeichnen und abzählen verstanden ist, wird diese Lösungsmethode auf das gesamte Einmaleins erweitert. Eine *Fünferlinie* sorgt dabei dafür, dass auch größere Multiplikationen ohne Zählprozess erkannt und zugeordnet werden können. (Abb. 5a,b) Das festigt nebenher die Strukturierung des Zahlenraum bis 10 und es bereitet die Strategie vor, eine Aufgabe wie 6·4 =__ in sinnvollen Teilschritten über 5·4 +1·4 zu lösen.

<u>Abb.5:</u> Karofelder mit Fünferlinie

a) *b)*

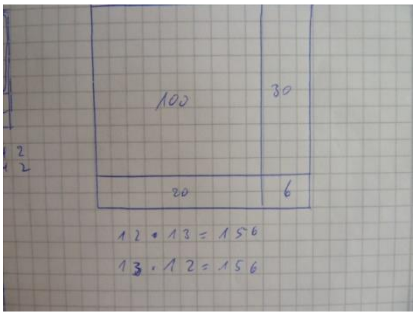


6·4 = 24 7·6 = 42

Bei Rechtecken mit Fünferlinien werden die Karos nicht mehr einzeln ausgezählt. Vielmehr wird die Tatsache 2·5= 10 ausgenutzt und werden Zehner sichtbar zusammengefasst. So entsteht die Lösung bei den meisten Aufgaben des kleinen Einmaleins aus der Zusammenfassung von Zehnern und Einer-Werten, was das Verständnis für den dezimalen Aufbau der zweistelligen Zahlen unterstützt.

Sogar Aufgaben des großen Einmaleins lassen sich geometrisch lösen, wenn statt der Fünfer- eine Zehnerlinie die Aufgabe sichtbar und den Wert über die nun sichtbaren Zehner bestimmbar werden lässt. (Abb.6) Selbst Aufgaben wie 23•32= lassen sich unaufwändig geometrisch lösen. Hat man das Prinzip verstanden, reicht eine Skizze, um die Lösung 736 ganz anschaulich zu finden. (2016c, S. 28). Das spätestens macht den geometrischen Einstieg auch für leistungsstarke Schüler interessant, die an dieser Stelle den dreistelligen Zahlbereich aufbauen können.

<u>Abb.6:</u> Mit Zehnerlinien können große Multiplikationen gelöst werden.



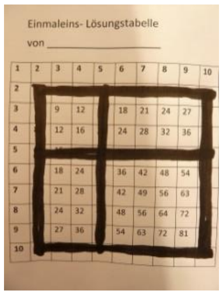
Im Rahmen dieses geometrischen Einstiegs werden auch Sachaufgaben und Divisionen durch die Übersetzung in Rechtecke geometrisch gelöst. Sogar die erste Mathematikarbeit lässt sich als gemeinsame Arbeit auf dieser Grundlage schreiben, bevor nachfolgend die Automatisierung des Einmaleins begonnen wird.

4. <u>Inklusives Training des Einmaleins</u>

Die Automatisierung beginnt damit, dass alle Kinder eine vollständige Lösungstabelle an die Hand bekommen. (2016c, S. 12ff und 29ff.) Unbekannte Aufgaben sollen ausdrücklich nicht durch Reihenaufsagen ermittelt, sondern im Zweifelsfall nachgeschaut werden. Dadurch haben alle Kinder eine gemeinsame Ausgangsposition. Und dadurch kann im Unterricht im Prinzip jede Aufgabe gestellt werden. Da das Nachschauen nicht negativ sanktioniert wird, hat man eine gemeinsame Situation und kann gemeinsam alle zweckmäßig erscheinenden Rechenprobleme und Aufgaben ins Spiel bringen. Das unterschiedliche Kompetenzniveau zeigt sich als *Selbstdifferenzierung* in den unterschiedlichen Lösungswegen.

<u>Abb.7:</u>

Die 1x1-Lösungstabelle



Die beherrschten Reihen 2, 5 und 10 wurden gestrichen.

Jedes Kind bekommt außerdem einen 1x1-Pass, in dem, beginnend mit der Zehner-Reihe, alle beherrschten Reihen abgezeichnet werden. Beherrschen bedeutet, dass je 9 Multiplikationen, Divisionen und Ergänzungsaufgaben dieser Reihe auf einem Test-Blatt in höchstens 2 Minuten gelöst werden können.

Hat ein Kind seine Unterschrift für eine Reihe, so wird diese sowie die verwandten Tauschaufgaben auf seiner Lösungstabelle gestrichen. Nachschauen kann es jetzt nur noch diejenigen Aufgaben, die es noch nicht automatisiert hat. (Abb.7)

Kennt ein Kind neben der10er- 2er- und 5er-Reihe auch die vier fehlenden ‚kleinen Aufgaben' im linken oberen Quadranten, so hat es bereits das Minimalziel der zweiten Klasse erreicht: Es hat das Prinzip verstanden und von den 100 Aufgaben fehlen nur noch 32! Beherrscht es bis Mitte der Zweiten Klasse auch die 3er- und 4er-Reihe, so bleiben nur noch die 16 Aufgaben im Bereich rechts unten, die *‚großen Aufgaben'* übrig.

Insbesondere unter inklusivem Gesichtspunkt sind zwei Dinge wichtig: Erstens werden nicht Reihen, sondern Aufgaben innerhalb einer Reihe oder eines Bereichs (kleine/große Aufgaben) gelernt. Das Aufsagen und Auswendiglernen einer Reihe gibt nur dann einen Sinn, wenn dieser Vorgang von verständigen Rechenschritten begleitet gedacht werden kann. Kindern, die Probleme haben, im zweistelligen Zahlenraum und insbesondere bei Zehnerübergängen verständig zu rechnen, gelingt aber genau das nicht. Wenn sie rechnen, entstehen Rechenfehler. Und wenn sie die Reihe auswendig lernen, können sie sich die Fülle der Informationen beim 1x1 meist nicht merken, was ebenfalls Fehler produziert. Daher sollten schwierige Aufgaben eher in sich gelernt und geübt werden. Das gilt umso mehr, als es meist nicht ‚die Reihe' ist, die Schwierigkeiten macht, sondern es zum Beispiel die drei Aufgaben 7·3, 8·3 und 9·3 sind, die es zu klären gilt.

Zweitens lohnt es sich, die Automatisierung in kleinen Schritten (und dafür sehr sorgfältig) durchzuführen. Sehr sorgfältig heißt dabei: *Eine Aufgabe ist dann erst automatisiert, wenn man das Ergebnis ohne größeres Nachdenken praktisch weiß!* Es hilft allen Kindern, wenn dieser hohe Anspruch mit einem langsamen Voranschreiten kombiniert wird. Das Ziel muss Ende der dritten Klasse oder gar Ende der zweiten Klasse noch nicht erreicht sein. Die halbschriftlichen und schriftlichen Verfahren sind ausgesprochen gut geeignet, die Automatisierung bis Ende der vierten Klasse für die allermeisten Kinder sicher abzuschließen.

Bei jenen Ausnahmekindern, die aus nachweisbar grundlegenden Problemen heraus zu einem echten Verständnis von Multiplikation und Division nicht in der Lage sind oder denen aus ebenso benennbaren und nachvollziehbaren Gründen Automatisierungsprozesse schwerfallen, sollte es immerhin möglich sein zu erreichen, dass die Aufgabenformate der Multiplikation und Division, auch viele Aufgabenformate aus dem 3. und 4. Schuljahr am Ende beim Übergang in die weiterführende Schule durch den gemeinsamen Unterricht vertraut sind und dass zumindest erste Kenntnisse des 1x1 automatisiert existieren. Das in Verbindung mit der vertrauten Handhabung der Lösungstabelle stellt für diese Schülergruppe sicher, dass sie auch in der weiterführenden Schule inklusiv beschult werden und am Ausbau ihrer 1x1-Kenntnisse im gemeinsamen Unterricht weiter mitarbeiten können. Für den Rest der Klasse gilt jedoch: Beim Übergang in die 5. Klasse sollte das Einmaleins sitzen!

5. Inklusiver Abschluss der Automatisierung

Der didaktische Trick beim Abschluss der Automatisierung besteht aus zwei Bausteinen. Zum einen sollte man das beschriebene 1x1-Training mit dem Einmaleins-Pass und der Lösungstabelle im 3. und im 4. Schuljahr wiederholen. Diese Wiederholung hilft leistungsstarken Schülern, zu einem völlig automatisiertem Wissen vordringen und die 192 Aufgaben des Diagnose-Tests (2016c, S. 55) in deutlich unter 10 Minuten richtig zu lösen. Leistungsschwachen erlauben diese Wiederholungen, sich weiter in Richtung sicherer Einmaleins-Kenntnisse vorbewegen, wobei das gemeinsame Geschehen dafür sorgt, dass sie diese Wiederholung nicht als kränkend empfinden müssen.

Zum anderen können die halbschriftlichen und schriftlichen Verfahren, insbesondere die der Multiplikation durch entsprechende Arbeitsblätter (Abb. 8) dafür genutzt werden, beim Üben des Verfahrens genau die Reihen und Aufgaben festigen werden, die noch unsicher sind. Das ist für *alle (!)* Kinder möglich, weil die Verwendung der Lösungstabelle es erlaubt, dass alle Kinder an der Erarbeitung der Verfahren beteiligt sein können. Das Erlernen des neuen Verfahrens wird gerade nicht von schon vorhandenen Einmaleins-Kenntnissen abhängig gemacht. Vielmehr folgt die Automatisierung in gewissem Sinn dem Rechnen nach. Durch das Rechnen und den Gebrauch der Tabelle, durch das wiederholte Nachschauen der immer gleichen Lösungen, schreitet die Automatisierung voran.

Abb. 8: Automatisierung der 6er-Reihe beim halbschriftlichen und schriftlichen Rechnen

$423 \cdot 6 =$ ____	$345 \cdot 6 =$ ____	$6 \cdot 444 =$ ____	$6 \cdot 453 =$ ____	
$666 \cdot 6$	$777 \cdot 6$	$888 \cdot 6$	$678 \cdot 6$	$999 \cdot 6$

Literatur:

Klaus Rödler (2016a) *Mathe inklusiv: Ratgeber für das 1./2. Schuljahr* (AOL-Verlag, Hamburg)

Klaus Rödler (2016b) *Mathe inklusiv: Materialband 1 (Zahlverständnis und Operationen)* (AOL-Verlag, Hamburg)

Klaus Rödler (2016c) *Mathe inklusiv: Materialband 4 (Einmaleins und Geometrie)* (AOL-Verlag, Hamburg)

Siehe auch: www.rechnen-durch-handeln.de

Etwa: 17.500 Zeichen (mit Leerzeichen)