Klaus Rödler (2016)

# Gemischte Rechenpäckchen statt vorsortierter Aufgaben

Das Problem der Analogieaufgaben

Das didaktische Prinzip *'Vom Einfachem zum Schweren*' hat in der Schule dazu geführt, dass insbesondere auch das Lernen des Rechnens sich als ein gestufter Lehrgang von isolierten Einzelthemen darstellt: Erst werden die Zahlen und ihre kardinalen Grundlagen vermittelt, dann die Rechenoperationen dazu. Erst plus und dann minus. Geht es um das Thema der Zahlraumerweiterung wiederholt sich dieser Prozess, wobei die einfacheren Analogieaufgaben vorgeschaltet werden, um den größeren Zahlraum rechnend zu erschließen. Aufgaben mit Zehnerübergang folgen nach. Diese Grundidee der Stufenfolge findet sich quer über alle Lehrwerke. Doch genau hierin liegt ein wesentlicher didaktischer Fehler, weil dieser Unterrichtsaufbau und insbesondere auch das Vorschalten von Analogieaufgaben leistungsschwache, an der Zahlreihe orientierte und nach Rechentricks suchende Kinder im falschen Denken bestärkt.

*Aufgaben wie 12 + 3 =, 17 – 4 =, 20 + 30 =, 50 – 40 =, 23 + 5 =, 67 – 4 =, 46 + 21 = und 78 – 23 = können durch falsches Denken richtig gelöst werden.* Das ist möglich, weil Einer und Zehner in all diesen Aufgaben isoliert nebeneinander betrachtet werden können. Der Zehner darf hier wie eine andere Art Einer behandelt werden. (Abb.1) Das ist die Grundlage der Analogie, von der die Benennung dieser Aufgaben herrührt.

*Abb.1: Die Gefahr von Analogieaufgaben.*

12+3/17-4: Da rechne ich hinten und schreibe eine 1 davor.

20+30/50-40: Da rechne ich vorne und schreibe eine 0 dahinter.

23+5/67-4: Da rechne ich hinten und die vordere Zahl bleibt stehen.

46+21/78-23: Da rechne ich vorne mit vorne und hinten mit hinten.

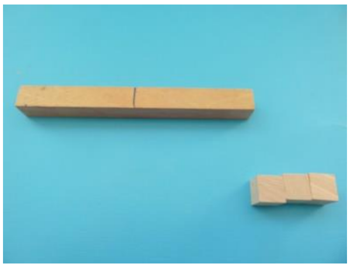
*Falsches Denken führt zu richtigen Lösungen.*

Dadurch dass dieses an den Ziffern orientierte Rechnen zum richtigen Ergebnis führt, festigt sich das falsche Konzept. Das Kind hat das Gefühl, dass es die Sache verstanden hat, wenn es die Ziffern als Zahlen nimmt und die Zehner wie die Einer berechnet. Es fühlt sich bestärkt und ermutigt, zumal ihm dieses Rechnen weiterhin zählende Lösungswege erlaubt. Es gibt keinen Grund, sich mit der kardinalen Qualität der Aufgabe und mit dem Zehner-Einer-Zusammenhang der zweistelligen Zahlen zu beschäftigen. Dadurch verhindern diese Aufgaben als isolierte Übungen genau das, worum es beim Einstieg in den größeren Zahlenraum eigentlich geht: Den Aufbau des Verständnis für den *'reversiblen Zehner'*.

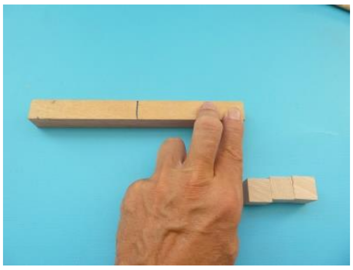
Ohne *reversiblen Zehner*, das heißt, ohne Einsicht in die Tatsache, dass der Zehner aus der Bündelung von zehn Einern entsteht und bei Bedarf wieder zu zehn Einern entbündelt werden kann, ist der darauf aufbauende nächste Schritt, die Einsicht in unser auf dezimalen Wertebenen (Einer-Zehner-Hunderter-Tausender-usw.) beruhendes Zahlsystem und das Verständnis des Positionssystems nicht möglich. Das Kind bleibt im Rechnen mit Ziffern hängen, was an typischen Rechenfehlern wie 14-7=13, 46-7=41, 73-28=55 sowie an Übertragsfehlern, insbesondere bei der schriftlichen Subtraktion, deutlich wird.

Der Einstieg über gemischte Päckchen

Gerade beim Thema Zehnerübergang wirkt das Prinzip ‚Vom Einfachen zum Schweren' verhängnisvoll. Der Weg muss im Gegenteil von Anfang an ins Zentrum des Themas führen. *Über den Zehner kann man nichts lernen, wenn man den reversiblen Zehner-Einer-Zusammenhang ausblendet.* Gerade am Anfang müssen die Kinder daher mit Aufgaben konfrontiert werden, die diese Auseinandersetzung mit der Zehnergrenze erforderlich machen. Gleichzeitig gilt es, gerade im Blick auf die schwachen Rechner und auch im Blick auf den inklusiven Gesamtanspruch der Grundschule, eine Form zu finden, die diese Zielgruppe nicht überfordert. Im Ratgeber ‚Mathe inklusiv' wird dieser Weg für das 1. Und 2. Schuljahr ausführlich beschrieben. Hier wird er am Beispiel der Einführung des Zehnerübergangs im 20er-Raum dargestellt.



Der Einstieg in den Zehnerübergang im 20er-Raum erfolgt über gemischte Päckchen mit gleicher Ausgangszahl (13-2=/13-5=/13-1=/13-3=/13-4=). ‚Gemischt' meint hier, dass Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang im Päckchen enthalten sind. Bewusst wird die Subtraktion als Einstieg genutzt, da bei der Subtraktion der Zehner als Grenze unvermeidlich erfahren wird. Zumindest dann, wenn man mit *‚konkreten Bündelungsobjekten'* wie einer Zehnerstange arbeitet. Bei der Addition muss der neue Zehner aus den Einern dagegen erst gebildet werden. Hier setzt das Rechnen im Blick auf den Zehner das Konzept des Zehners bereits voraus, das es ja eigentlich erst zu entwickeln gilt. Es ist nicht unmittelbar einsichtig, warum die Aufgabe 8+5 = nicht einfach durch Weiterzählen gelöst werden darf.



Bei der Subtraktion 13-5= stößt das Kind dagegen ganz natürlich auf die Grenze des Zehners. Wie in Abbildung 2 deutlich wird, lassen sich nur drei Würfel zur Seite schieben. Zwei fehlen. Diese müssen aus dem Zehner herausgeholt werden. Das ist unmittelbar einsichtig.

Dieser Umtausch wird jedoch nicht vollzogen, sondern das Herauslösen geschieht durch *‚virtuelles Entbündeln'*. (Abb.3) Das verhindert, dass an den eingetauschten Einzelwürfeln doch wieder nur gezählt wird. Außerdem erzieht es dazu, in den Schritten des Übergangs zu denken. („3 weg, noch 2 weg von der 10, bleiben 8.") Dieser Handlungs- und Denkvorgang wird später, wenn sich das Kind von der Materialhandlung lösen soll, in der folgenden Form notiert: 13-5=10-2=8 Diese Notation bildet die Wahrnehmung der Rechenhandlung und der begleitenden Überlegungen unmittelbar ab. (Ausführlicher im Ratgeber (2016a), S.76 ff., S. 125 ff. S. 140 ff., sowie in Materialband 2/2016b)

Dieser handelnde Zehnerübergang bei der Subtraktion besteht aus Einzelschritten, die auch schwachen Schülern möglich sind. Der erste Schritt ist ganz einfach, da nur die vorhandenen Würfel weggeschoben werden müssen. Der zweite Schritt wird erleichtert, wenn man bei den Aufgaben darauf achtet, dass um nicht mehr als zwei oder drei entbündelt werden muss. Die Zahl der fehlenden Würfel kann ein schwacher Schüler bei noch ungefestigtem Zerlegungswissen dann durch Weiterzählen bestimmen. Für den dritten Schritt ist das Wissen um die Zehnerpartner Voraussetzung. Eine Fünferlinie auf der Zehnerstange hilft, die auftretenden Zehnerpartner (-1/9, -2/8, -3/7) zu bestimmen. Zur Not kann an auch eine Tabelle an die Hand geben, da es an dieser Stelle darum geht, dass das Kind sich dem Denken in Schritten anvertraut. Mangelhaftes Zerlegungswissen soll diese konzeptionelle Weiterentwicklung nicht beeinträchtigen.

Aber warum wurden bei dieser Einführung die Päckchen gemischt? Warum beschränkt man sich nicht auf Aufgaben mit Übergang. Hätte man dann nicht eine größere Übungsdichte? Der Punkt ist: *Alle Formen der Vorsortierung führen dazu, dass gerade leistungsschwächere Schüler das Schema suchen, statt auf den Kern der Sache zu schauen.* Im konkreten Fall lernen sie dann das Handlungsschema des Übergangs und die damit verbundenen Schritte und deren Notation (was nicht wenig ist). Aber das Bewusstsein für den Zehner selbst und der vorausschauende Blick auf den kardinalen Gehalt einer Rechenaufgabe entwickelt sich dabei nicht zwingend. Rechenpäckchen, die Aufgaben mit und ohne Zehnerübergang mischen, verhindern dagegen, dass ein Kind schematisch an die Aufgaben herangeht. Dieser Effekt wird gesteigert, wenn das Kind gefordert ist, den Unterschied zwischen den Aufgaben *vor* (!) dem Rechnen zu bestimmen, also die Aufgaben zu *‚filtern'*.

<u>Das Filtern als Verständnisschulung</u>

Hat man in der Klasse gemeinsam so ein gemischtes Päckchen durch Rechenhandlungen gelöst (Abb.4), so sollte man auf eine Merkwürdigkeit hinweisen: „ Die Lösungen unterscheiden sich. Mal steht vorne eine 1 und mal nicht!“ (An dieser Stelle lohnt es sich, die Besonderheit in solche Worte zu setzen, die ein noch an den Ziffern orientierter Schüler wählen würde.) „Woran liegt das?“

| Merkwürdig! |
|---|
| 13 – 2 = 11 |
| 13 – 5 = 8 |
| 13 – 1 = 12 |
| 13 – 3 = 10 |
| 13 – 4 = 9 |

Diese Frage führt die Aufmerksamkeit der Kinder auf den kardinalen Hintergrund der zweistelligen Zahlen und lenkt zugleich den Blick auf den reversiblen Charakter des Zehners. Zunächst wird durch die mit Zehnerstange und Würfeln gelegte 13 deutlich, dass die 1 vorne erhalten bleibt, wenn die Zahl der wegzunehmenden Würfel nicht größer ist. Zweitens zeigt sich, dass es hier nicht um ‚Eins' geht, sondern um ‚Zehn'. Die ‚1' steht für die Zehnerstange. Die zweistellige Zahl ist nach Zehner-Stange und Einer-Würfeln gebaut, was das Wissen um die Zehner-Einer-Gliederung der zweistelligen Zahlen ebenso vorbereitet wie deren Schreibweise in unserem Positionssystem. Drittens ist unmittelbar verständlich, dass die ‚1' für die Zehn verschwindet, wenn die Würfel nicht ausreichen und daher einige Würfel aus der Zehnerstange herausgeholt werden müssen. Das heißt, die reversible Qualität des Zehners wird genutzt.

Ist das verstanden, so bekommen die Kinder die Aufgabe, zukünftig erst nur diejenigen Aufgaben auszurechnen, bei denen der Zehner *nicht* verschwindet und die anderen nur anzukreuzen. (Abb.5) Sie sollen also die Aufgaben mit Übergangsproblem aus dem gemischten Päckchen herausfiltern und die einfacheren Analogieaufgaben rechnen.

Aufgaben filtern!

| | |
|---|---|
| | 15 – 2 = 13 |
| | 15 – 5 = 10 |
| X | 15 – 7 = ___ |
| | 15 – 3 = 12 |
| X | 15 – 6 = ___ |

Neben dem didaktischen Effekt für alle hat dieses Filtern im Blick auf schwache Schüler und vor allem auch im inklusiven Unterricht einen besonders wertvollen Effekt: Der erste Arbeitsauftrag, das Herausfinden und Berechnen der Analogieaufgaben, kann *von allen*(!) geleistet werden. Die falsche Vorstellung, man könne den Zehner-Einer-Zusammenhang beim Rechnen ignorieren, wirkt sich nicht negativ aus und ist bei den als einfach eingestuften Aufgaben ja richtig. Es werden ja genau die Aufgaben berechnet, bei denen man sich im Vorfeld vergewissert hat, dass genügend Einer vorhanden sind, so dass alleine auf der Einerstelle gerechnet werden darf. Damit sind gemischte Päckchen mit dieser Aufgabenstellung auch gut als Hausaufgabe geeignet.

Die angekreuzten Aufgaben sollten, bis das Berechnen des Übergangs gesichert ist, in der Schule gelöst werden. Das stellt sicher, dass sie nicht rückwärtszählend, sondern entweder von der Materialhandlung begleitet oder durch die oben dargestellte Notation ausgerechnet werden. Auf Materialhandlung und Notation sollte erst dann verzichtet werden, wenn sichergestellt ist, dass das Kind die Schritte wirklich denkt und dass das Zerlegungswissen der Zerlegungen bis 10 gesichert ist und genutzt wird. (RÖDLER 2016a, S. 76ff., S. 129ff und 2016b)

<u>Gemischte Päckchen und Aufgaben filtern als Grundprinzip</u>

Das Filtern von Aufgaben in gemischten Päckchen hat seine Bedeutung im gesamten Rechenunterricht, nicht nur bei der Einführung des Zehnerübergangs durch die Subtraktion. (Abb.6)

Gemischte Päckchen mit gefilterten Aufgaben

| | | |
|---|---|---|
| 5 – 3 = 2 | 35 + 3 = 38 | 46 – 23 = 23 |
| 3 – 5 = **<u>X</u>** | x 35 + 7 = __ | 46 – 35 = 11 |
| | 35 + 1 = 36 | x 46 – 17 = ___ |
| X 7 – 3 = __ | x 35 + 6 = __ | x 46 – 38 = ___ |
| 7 – 1 = 6 | 35 + 4 = 39 | 46 – 40 = 6 |
| 7 – 2 = 5 | 35 + 2 = 37 | x x 46 – 50 = **<u>X</u>** |
| 7 – 4 = __ | x 35 + 8 = __ | 46 – 6 = 40 |

Bereits in den ersten Wochen, wenn das Kopfrechnen beginnt, lassen sich lösbare und unlösbare Subtraktionen wie 5-3=/3-5= zusammenbringen und *vor*(!) dem Ausrechnen unterscheiden. Durch die Übersetzung in ein Rechenmittel bereitet dieser Unterschied keinerlei Schwierigkeiten. Diese Aufmerksamkeitsschulung schiebt dem blinden Drauflosrechnen früh einen Regel vor. Außerdem taucht das Problem der fehlenden Einer ja beim

Zehnerübergang wieder auf, nur dass die fehlenden Einer dann aus dem Zehner herausgenommen werden können.

Wählt man den Weg der Zahlraumerweiterung mit *‚konkreten Fünfern'* (RÖDLER 2016a, S. 79ff., S. 122ff. und 2016b), so erfahren die Kinder die Übergangsproblematik bereits auf der Fünferbasis. (7-2 ist direkt lösbar, weil 2 Einzelwürfel von der Fünferstange weggeschoben werden können. 7-3 ist nicht direkt lösbar, weil ein Würfel fehlt. Dieser muss – wie beim Zehner – durch virtuelles Entbündeln aus der Fünferstange herausgeholt werden, was aber wesentlich leichter ist, da man für das Rechnen auf Fünferbasis nur die beiden Zerlegungen 1/4 und 2/3 kennen muss.)

Wie bei der Subtraktion lassen sich auch gemischte Päckchen mit Additionen daraufhin filtern, ob ein neuer Zehner entsteht oder nicht. Und natürlich geht das im Zahlbereich bis 100 genauso wie im Zahlbereich bis 20. Additionen mit zwei zweistelligen Summanden und Subtraktionen mit zweistelligem Subtrahenden lassen sich ebenfalls daraufhin filtern, ob eine Analogieaufgabe oder eine Aufgabe mit Zehnerübergang vorliegt. (Bei den Subtraktionen sollten Sie die Chance nicht ungenutzt lassen, wieder auf das Thema der unlösbaren Aufgaben zurückzukommen, die in den gemischten Päckchen ebenfalls entsprechend vorab markiert werden.

Kompetentes Rechnen setzt einen kompetenten Blick auf die zu berechnende Aufgabe voraus. Dieser kann sich nicht entwickeln, wenn gleichartige Aufgaben angeboten werden, die schematische Lösungswege erlauben. Gemischte Päckchen in Verbindung mit dem bewussten Filtern hin auf Unterschiede helfen, den kompetenten Blick auf Rechnungen zu entwickeln und dabei das Konzept des reversiblen Zehners zu stärken.

Literatur:

Rödler, Klaus (2005) *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett – Rechnen durch Handeln* (Kallmeyer Verlag, Velber)

Klaus Rödler (2016a) *Mathe inklusiv: Ratgeber für das 1./2. Schuljahr* (AOL-Verlag,Hamburg)

Klaus Rödler (2016b) *Mathe inklusiv: Materialband 2 (Zehnerübergang im Zahlraum bis 20)* (AOL-Verlag, Hamburg)

Siehe auch: www.rechnen-durch-handeln.de