Rechnen lernen statt zählen – von Anfang an!

Klaus Rödler

Zusammenfassung. ‚Mathe inklusiv - Rechnen durch Handeln' ist eine in der Unterrichtspraxis mit Inklusionsklassen und extrem heterogenen Gruppen gewachsene vom Autor entwickelte didaktische Alternative zu den vertrauten schulischen Rechenlehrgängen. Der von der Kulturgeschichte inspirierte Ansatz nutzt die Stufen der kulturgeschichtlichen Zahlentwicklung für ein ‚Rechnen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau'. Durch diese didaktische Umorientierung wird es möglich, die Zahlen und das Rechnen von Anfang an in den Dienst sachkundlicher Fragen zu stellen, indem der Mathematikunterricht in fächerübergreifende Projekte integriert wird. Es entsteht ein im Sinne Toeplitz, Wittmanns und Wagenscheins genetischer Lehrgang mit einem hohen Anteil natürlicher Differenzierung. Gleichzeitig führt die Abkehr von der Zählzahl und die Hinwendung zur konkreten Zahl dazu, dass der Unterricht von Anfang an den Blick auf Struktur- und Operationszusammenhänge lenkt, was wesentliche didaktische Veränderungen nach sich zieht: Subtraktion vor Addition, Einstieg ins handelnde Rechnen über Multiplikation und Division, früher Einstieg in den zwei- und dreistelligen Zahlenraum bei gleichzeitigem Schwergewicht auf den kleinen Zahlenraum bis 5, wenn es um den Einstieg ins Kopfrechnen nach dem Teile-Ganzes-Prinzip geht. Schließlich wird der Vorteil sichtbar, den Bündelungsobjekte gegenüber nur durch Färbung sichtbar gemachten Strukturen bieten. ‚Rechnen durch Handeln' hat den Anspruch, dass es den Kindern vom ersten Schultag an hilft, Alternativen zum zählenden Rechnen zu entdecken und ihr Zahlkonzept so weit zu verändern, dass diese ihre Rechnungen in der Regel nicht mehr zählend durchführen. Rechnen durch Handeln hat zweitens den Anspruch, dass dies in einem gemeinsamen inklusiven Unterricht geschieht, bei dem Differenzierung durch die unterschiedlichen Zugriffsebenen der Kinder geschieht und nicht mehr durch trennende Fördermaßnahmen und differenzierende Aufgabenstellungen.

Einleitung

Wenn Kinder in die Schule kommen, kennen die meisten schon die Zahlzeichen und können die allermeisten schon mehr oder weniger weit zählen. Auf dieser Grundlage gelingt es ihnen sogar, erste Rechnungen auszuführen (Moser-Opitz, 2008, S. 54). Es scheint also natürlich, schulisch an dieser vorhandenen Kompetenz anzuknüpfen. Hinzu kommt: „In der Diskussion, ob die Anzahl oder die Zählzahl wichtiger sei, nehmen die Mathematiker klar für die Zählzahl Stellung" (Moser-Opitz, 2008, S. 60). Es verwundert daher nicht, dass in der Schule Zählprozesse und zählendes Rechnen den Einstieg in die schulische Arithmetik bilden, wobei es nur noch darum zu gehen scheint, wie diese manchen zunächst nur gedichtartig bekannte Zahlwortreihe kardinal unterlegt und im Blick auf den Zehner strukturiert werden kann.

Wäre dieser naheliegende Einstieg von durchgängigem Erfolg gekrönt, wäre die Frage nach alternativen Wegen allenfalls eine akademische. Tatsache ist aber, dass ein bedeutender Anteil von bis zu 20% der Kinder eben nicht richtig rechnen lernt und dass viele dieser Kinder daran scheitern, dass sie kein Stellenwertverständnis aufbauen und auch deshalb im zählenden Rechnen hängen bleiben (Lorenz, 1998; Gerster & Schultz, 2004; Dornheim, 2008; Moser-Opitz, 2008; Meyerhöfer, 2011; Fromme, 2015; Gaidoschik et al., 2017). Die Frage nach produktiven Wegen ist angesichts dieser Problemlage drängend. Die in den Schulen praktizierten Umsetzungen fachdidaktischer Vorschläge erweisen sich im Blick auf die Zielgruppe der schwachen Rechner faktisch als wenig effektiv. Der Versuch, über immer feinere Differenzierung und Individualisierung das Problem zu lösen, überfordert nicht nur die Lehrkräfte, sondern bleibt so lange erfolglos, wie die dort verwendeten Methoden nichts Anderes bieten als ein kleinschrittiges Wiederholen dessen, was sich zuvor bereits als untauglich erwiesen hat.

Vor diesem Hintergrund wird in diesem Aufsatz auf eine didaktische Alternative hingewiesen, die 2006 als ‚Rechnen durch Handeln' vom Autor veröffentlicht wurde. Diese zeichnet sich dadurch aus, dass sie nicht die Zahlzeichen und die Zahlwortreihe, also das aktuelle kindliche Erfahrungsfeld, zum Ausgangspunkt nimmt, sondern das der Kulturgeschichte abgeschaute ‚Rechnen mit konkreten Zahlen' (Rödler, 2006a-b, 2010, 2014, 2015, 2016a-f). Eine tiefere Diskussion im Gegenüber der Argumente wird an dieser Stelle nicht geleistet. Ein solcher Diskurs gibt erst dann einen Sinn, wenn die vorgeschlagene Alternative als solche

plausibel und diskussionswürdig erscheint. Immerhin wird im dritten Teil des Artikels eine wissenschaftliche Anbindung vorgenommen, die deutlich machen soll, wo der Ansatz einzuordnen ist und auf welchen Feldern zu diskutieren wäre.

Neben dem nur begrenzten Erfolg des Rechenunterrichts der Grundschule gibt es zwei weitere Argumente, die es geraten scheinen lassen, nach Alternativen zu suchen: Ein vom Zählen und der Zahlwortreihe ausgehender Unterricht ist strukturell nicht inklusiv und widerspricht daher den Zielen und Aufgaben, welche durch die Behindertenrechtskonvention auch in die Grundschule hineingetragen werden. Sowohl die Zählkompetenz der Kinder, wie auch ihr auf dieser Grundlage gebildete Zahlbegriff differieren stark (Moser-Opitz, 2008, S. 56). Unterforderung auf der einen Seite, Überforderung auf der anderen sind die notwendigen Folgen eines Einstiegs über die Zahlwortreihe und verlangen entsprechende Gegenmaßnahmen. Leistungsschwache Kinder erscheinen von Anfang an als mangelhaft und förderbedürftig. Das schwächt deren Selbstkonzept und verstärkt das Risiko einer negativen Gesamtentwicklung.

Zweitens führt die Verknüpfung unserer Zahlzeichen mit verbalen Zählprozessen dazu, dass nicht nur bei den Kindern, sondern auch bei vielen Lehrkräften das Zeichen als ‚die Zahl' genommen wird, die nur noch der ‚Veranschaulichung' bedarf. Diese Identifizierung des Zeichens mit der Zahl führt dazu, dass Strukturaspekte gezwungenermaßen über *‚Veranschaulichung'*, also als didaktische Ergänzungen von außen ins Spiel kommen. Die aus der Zahlwortreihe gewonnenen und in unseren Zahlzeichen geschriebenen Zahlen besitzen ja durch das ‚Immer Eins mehr' als Grundidee eine eher gleichförmige lineare Struktur und zunächst keine innere Gliederung wie die nach Zehner und Einer.

Der nachfolgend vorgestellte Weg identifiziert die Zahl nicht im Zeichen oder im Wort. Beide spielen die Rolle von Kommunikationsmitteln, mit denen sich über Zahlen sprechen lässt und man Operationen symbolisch darstellen kann. Drei Äpfel z.B. sind die kardinale Wirklichkeit, die aus einem gegebenen Grund festgehalten werden soll. Die drei Striche oder drei Würfel, welche dies in der analogen Abbildung leisten, sind die Zahl.[20] Heutzutage können wir aufgrund der vorhandenen Zahlwortreihe diese analoge Abbildung auch direkt ins Zahlwort durchführen, so dass das Zahlwort selbst zur kardinal verstandenen Zahl werden kann.[21] Am kulturgeschichtlichen Anfang der Zahl aber gab es dieses Hilfsmittel nicht. Und es erweist sich als didaktisch produktiv, die materielle Abbildung selbst als konkrete Zahl zu nutzen, über die mit Zahlworten und Zahlzeichen kommuniziert wird.

‚Rechnen durch Handeln' ist aus der Grundidee entstanden, über kulturgeschichtlich frühe Zahlen neue Zugänge zu finden, die sich auch jenen Kindern öffnen, denen der Weg über unsere abstrakten Zahlen verschlossen bleiben. Entsprechend gliedert sich der nachfolgende Text in drei Abschnitte*: Wurzeln und Grundlagen des Konzepts*, *praktische Konsequenzen* und *Gründe für die Wirksamkeit des Vorgehens*.

Wurzeln und Grundlagen des Konzepts

> *„Der Pädagoge kann nicht anders, als die Grenzen des Faches, auf dem er zu Hause ist, überschreiten. Tut er es nicht, so verliert er seine bildende Aufgabe aus den Augen." (Wagenschein, 1970, S. 7)*

Ausgangspunkt dieser Neukonzeption des Mathematikunterrichts war ein Unterrichtsprojekt, das in einer dritten Schulstufe über mehrere Monate die Kulturgeschichte der Zahlen und des Rechnens nachverfolgte und den sonstigen Mathematikunterricht in dieser Zeit weitgehend ersetzte (Rödler, 1997, 1998). Damit wurde der Tatsache Rechnung getragen, dass die bis dahin auf Entdeckerfreude und Eigentätigkeit beruhenden Methoden nicht funktioniert hatten. In dieser leistungsschwachen Klasse waren 4 Kinder mit sonderpädagogischem Förderbedarf und 16 weitere, überwiegend aus unterschichtigem Migrationsmilieu. Einige der Kinder waren als Flüchtlingskinder in Hotels untergebracht. In dieser Gruppe gab es zu wenige Kinder, die Impulse setzen konnten. Der Versuch, die Situation durch gezielte kleinschrittige Förderung unter Verwendung der bekannten Methoden zu verbessern, hatte ebenfalls keinen Erfolg. Vor diesem Hintergrund entstand der Gedanke, das

[20] Die drei Äpfel könnten auch eine konkrete Zahl sein, dann nämlich, wenn Äpfel selbst als Zählmaterial genutzt würden, um andere kardinale Wirklichkeiten festzuhalten, so wie in früheren Zeiten z.B. Muscheln. Dann könnten drei Äpfel auch für drei Kinder, drei Gläser oder drei Tage stehen.

[21] Zu den dafür notwendigen Verständnisprozessen: Gelman & Gallistel, 1978; Fuson, 1988, S. 10ff, 57ff; Dornheim, 2007, S. 84ff.

Thema nicht mehr in der Logik gestufter Zahlenräume und Rechenverfahren zu entwickeln, sondern kulturgeschichtlich aufzurollen.

Rechnen ist abhängig von Zahlvorstellungen und die uns so vertrauten Vorstellungen sind das Ergebnis eines Jahrtausende währenden Entwicklungsprozesses (Damerow & Schmidt, 2004; Ifrah, 1987; Menninger, 1979). Im Vorwort zum ‚Prozess der Zivilisation' schreibt Norbert Elias:

> *„Nach einer Art ‚soziogenetischem Grundgesetz' durchläuft das Individuum während seiner kleinen Geschichte noch einmal etwas von den Prozessen, die seine Gesellschaft während ihrer großen Geschichte durchlaufen hat."* Und er präzisiert: *„Worauf hier hingewiesen werden soll, das ist die einfache Tatsache, dass auch in der zivilisierten Gesellschaft kein Menschenwesen zivilisiert auf die Welt kommt ..."* und dass deshalb *„…die Affekt- und Bewusstseinsstruktur des Kindes eine gewisse Verwandtschaft mit der von ‚unzivilisierten' Völkern"* hat. (Elias, 1976, S. LXXIV - LXXV)

Die Grundidee des Konzepts ist, dass diese Aussage bezüglich der Affekt- und Bewusstseinsstrukturen auch den Bereich des Zahlbegriffs betrifft, dass also kulturell frühere Zahlkonzepte und Rechenverfahren den Kindern zugänglicher sind und daher besser geeignet, das Wesentliche der Zahlen kennenzulernen. Horst Rumpf hat wiederholt auf die Bedeutung von Entschleunigung hingewiesen, die notwendig ist, um Bildungsinhalte zu verwurzeln. Er betont den Aspekt der Sinnlichkeit, der nicht übergangen werden darf. (Rumpf, 1981). Martin Wagenschein hat im Bereich der Physikdidaktik Alternativen erarbeitet. Er zeigt, wie von exemplarischer Erfahrung ausgehend das Denken und die Methoden der Physik ebenso erschlossen werden können wie fundamentale Inhalte. In einem genetischen Prozess, der die spontanen Reaktionen der Lernenden ernst nimmt und ihnen erlaubt, sich den im Raum stehenden Phänomenen auf der Grundlage eigenen Denkens und eigener Sprache zu nähern, entsteht „verwurzeltes Wissen", welches er dem „verdunkelnden Wissen" gegenüberstellt, das ein Physikunterricht mit zielgerichteten Experimenten und gereinigter Fachsprache oft erzeugt.[22] Schließlich zeigen pädagogische und didaktische Schulalternativen, dass Lernen auch in Spiel- und Projektinszenierungen stattfinden kann (Seifert & Nagel,1977). Von Hentig grenzt dieses eher auf die Lern- als auf die Lehrprozesse gerichtete Vorgehen mit dem Begriff der „Mathetik" (Lehre vom gelungenen Lernen) von der Didaktik (Lehre vom gelungenen Lehren) ab.

> *„Sie (die Freie Schule/K.R.) hat keine Didaktik, sondern eine Mathetik."*
>
> *„Mathetik … setzt die Ordnung des Erfahrungsraumes voraus. Die Lehrerarbeit wird in die Bereitstellung von ‚Sachen' verlagert." (von Hentig, 1985, 80ff.)*

Damit wird eine konzeptionelle Differenz beschrieben, welche auch die Hamburger Schulreformbewegung Anfang des 20. Jahrhunderts kennzeichnete (Gläss, 1961; Rödler, 1987).

Die Tatsache, dass die Kinder dieser dritten Schulstufe nach sechs Monaten verständig rechnen konnten und ein Jahr später erfolgreich in weiterführende Schulen wechselten, wirft die Frage auf, was genau diese Effekte bewirkte und wie man diese in einem Fachunterricht von Anfang an wirksam werden lassen kann.

Folgende fünf Thesen bilden die Grundlage des nachfolgend dargestellten Konzepts:

- Nicht das Rechnen ist schwierig, sondern es sind unsere Zahlen, die den Blick auf das kardinale und operationale Geschehen verstellen.
- Zahlen sind ursprünglich etwas Materielles, etwas Konkretes. Am Anfang der Kulturgeschichte steht nicht die Zahlwortreihe sondern stehen konkrete Zahlen. Zahlworte, Zahlzeichen und die Zahlwortreihe entstehen auf der Grundlage von konkreten Handlungserfahrungen erst später und allmählich in Schritten.
- Konkrete Zahlen können auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau existieren, also den kardinalen Gehalt unterschiedlich stark verschlüsseln. Auch Zahlworte und Zahlzeichen existieren auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau, sind also unterschiedlich zugänglich.
- Rechnen mit konkreten Zahlen erlaubt es, dass alle Kinder einer Klasse unabhängig vom Leistungsniveau verständig mathematische Probleme des Alltags wie auch Rechenaufgaben lösen. Und zwar überwiegend durch ihre intuitive Handhabung, unterstützt durch Anregung und Reflexion. Ganz automatisch entsteht ein Lernprozess, der sich in dem Sinne als ‚natürlich' erweist, dass Veränderungen des Rechenmittels von den

[22] Wagenschein, 1970, insbesondere S. 41-54. Zur genetischen Methode im Bereich der Mathematik: Toeplitz, 1927; Wittmann, 1981, S. 27ff und S. 130ff; Führer, 1997, S. 46ff.

Kindern spontan als plausibel wahrgenommen und genutzt werden. Sie bedürfen keiner größeren unterrichtlichen Erläuterung oder Einführung.

- Dieses Vorgehen erlaubt einen im Sinne *Georg Feuser*s inklusiven Unterricht am *‚gemeinsamen Gegenstand‘* und erspart die Notwendigkeit einer individualisierenden Differenzierung (Feuser, 2013).

Rechnen auf unterschiedlichen Abstraktionsstufen

Rechnen wird hier verstanden als das Lösen eines Anzahl- oder Größenproblems. Dieser breit gefasste Begriff erlaubt es, Lösungsvorgänge auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau unter Rechnen zu subsummieren. Probleme können protoquantitativ auf der Ebene der Wirklichkeit gelöst werden, durch analoge Abbildung in ein Zähl- oder Messmittel übersetzt, auf der Ebene materieller Bündelungen, die solche Einheiten zusammenfassen (im Anzahlbereich z.B. Zehnerstangen), auf der Ebene nur noch symbolischer Werte (z.B. Geldmünzen oder sumerische Wertgegenstände entsprechend den ägyptischen oder römischen Zahlzeichen), auf der Ebene von Handlungen in einem materiellen Stellenwertsystem (Rechenbrett, auf Linien, Abakus, Stschoty, Suanpan) oder eben auch auf der Grundlage von abstrakten Zahlzeichen, wie wir es kennen. Rechnen ist damit nicht mehr an unsere Zahlwortreihe gekoppelt oder gar an das Verständnis unserer Stellenwertzahlen. Rechnen ist eine Kompetenz, die alle Menschen unterschiedlichster Kulturen und Epochen und unterschiedlichsten Alters einbezieht. Damit ist Rechnen ein inklusiver Begriff.

Worum es schulisch geht, das ist, diese Grundkompetenz so zu entwickeln, dass ein verständiges Rechnen mit unseren abstrakten Zahlen möglich wird.

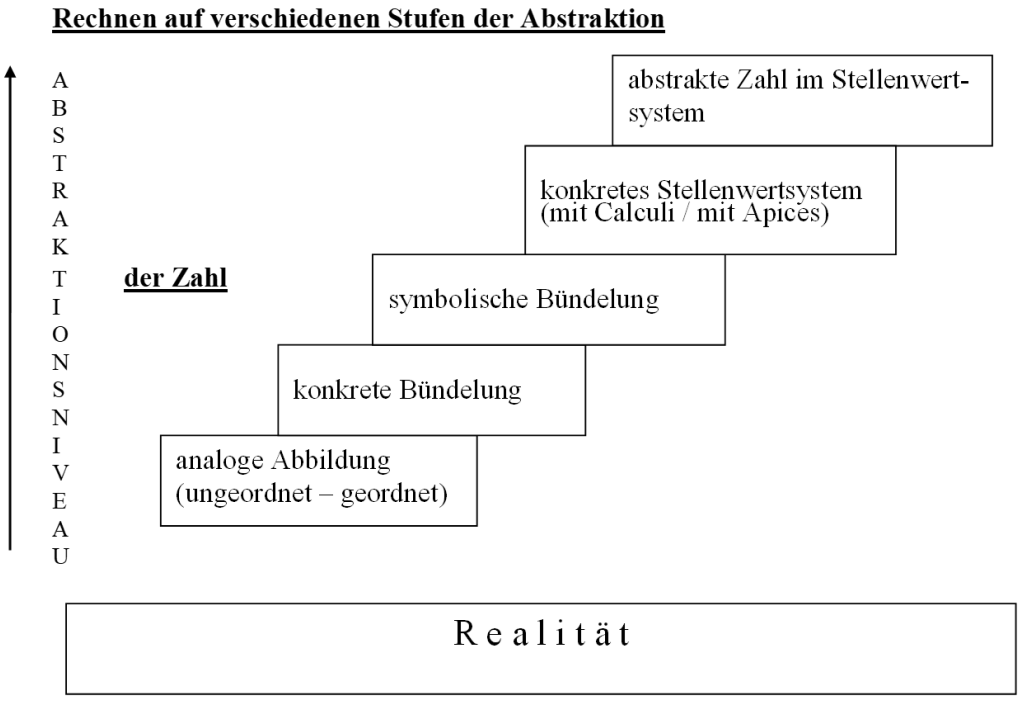

Abb. 1: Rechnen auf verschiedenen Stufen der Abstraktion

Der Blick in die Kulturgeschichte (Ifrah, 1987; Menninger, 1979) zeigt, dass die Zahl in ihrem Anfang kein Wort und kein Zeichen, sondern etwas Gegenständliches ist. Relevante Anzahlen werden durch analoge Abbildung festgehalten. Es sind materielle Zählelemente (Gegenstände oder Kerben). Eine Zahlwortreihe, in die hinein beim Zählprozess abgebildet werden könnte, existiert zu Anfang eben so wenig wie es abstrakte Zeichen für Zahlen gibt.[23]

[23] Das gilt nicht nur für den Anfang der Zahlwortreihe, sondern auch für deren Weiterentwicklung. Nach den ersten Zahlen als Eigennamen entstehen zunächst Zahlworte für Rangschwellen, die durch konkrete Bündelung gefunden werden. Erst danach werden die Lücken durch Reihung gefüllt. „Der frühe Mensch besitzt die höhere Zahl 1000 vor der niedrigeren 543.; denn 1000 ist durch Bündelung, 543 aber durch stufende Zählung gefunden. Unsere ‚theoretische‘ Bildung der

Diese ersten Zahlen zeigten den kardinalen Gehalt, den sie durch die analoge Abbildung festgehalten hatten. Das erlaubte Zahlen, für die es noch gar keine Worte gab. „So viele“, ist in Verbindung mit der konkreten Zahl eine dem Zahlwort gleichwertige Botschaft. Im protoquantitativ wahrnehmbaren Bereich bis drei oder vier entstanden erste eigene Zahlnamen. Das Bedürfnis, auch größere Anzahlen konkret benennen zu wollen, entstand nachfolgend dadurch, dass Strukturbildungen wie IIII/II es möglich machen, auch größere Zahlen wie hier 7 spontan zu erfassen. Auch die Zehner-Einer-Gliederung unserer Zahlwortreihe bis Hundert wie ihr weiterer dezimaler Aufbau in den drei- und vierstelligen Zahlenraum entwickelte sich im Zusammenhang mit entsprechenden Veränderungen bei den konkreten Zahlen und den daraus abgeleiteten Zahlwörter. (Menninger 1958a, S. 49 ff.)

Entsprechend geht ‚Rechnen durch Handeln‘ nicht wie der vertraute Unterricht von der abstrakten Zahl und dem Zählen in der Zahlwortreihe aus, sondern von der konkreten Zahl und von Handlungen mit solchen konkreten Zahlen. Zahlzeichen und Zahlwort werden als Kommunikationsmittel kennengelernt und bleiben das, bis das Verständnis so weit gereift ist, dass mit diesen gedanklich wie mit konkreten Zahlen handelnd gerechnet werden kann. Diese Entwicklung geschieht, indem immer neue Rechenprobleme auf einem angemessenen höheren oder niedrigeren Abstraktionsniveau gelöst und mit unseren Zahlzeichen und Zahlworten kommuniziert werden, so dass sich diese Symbole mit dem sich aufbauenden Handlungs- und Strukturwissen verbinden. „Schriftliche Symbole für Zahlen sollen eingeführt werden als Aufzeichnungen, Protokolle, Berichte über quantitative Vorstellungen, die das Kind bereits entwickelt hat.“ (Hiebert, 1988, in; Gerster & Schultz, 2004, S. 41). Dieser Grundidee folgt das hier dargestellte Vorgehen.

Erkenntnishürden bei der Zahlkonzeptentwicklung

Nicht das Rechnen muss gelernt werden, denn dieses ist im dargestellten Sinne Alltagserfahrung. Gelernt werden muss das in Zahl verwandelte Rechnen. Das bedeutet, das innere Zahlkonzept des Kindes muss sich entwickeln, damit das Kind irgendwann mit als Stellenwertzahl geschriebenen Zahlzeichen verständig rechnen kann.

Der Blick in die Kulturgeschichte liefert über die konkreten Zahlen und die auf diesen beruhenden unterschiedlichen Rechenhandlungen nicht nur ein Instrumentarium, mit dem didaktisch gearbeitet werden kann. Er liefert auch Hinweise auf zehn zentrale *„Erkenntnishürden“* (vgl. Meyerhöfer, 2011), welche es zu nehmen gilt. Diese zeigen sich in den Stufen der kulturgeschichtlichen Zahlkonzeptentwicklung.

1. Bedürfnis der Zahlbildung (Motiv Anzahlen oder Anzahlveränderung festzuhalten. Zahlen sind Werkzeuge des Geistes: Ohne Werk, kein Zeug!)
2. Kardinale Zahl (Verständnis, dass Zahlen Anzahlen benennen und dass die Zahl aus Einer-Elementen gebaut ist.)
3. Zahlen als kardinale Ganzheiten (Verständnis, dass Zahlen gleichzeitig ein Ganzes sind *und* aus Einer zusammengesetzt sind.)
4. Teile-Ganzes-Prinzip (Verständnis der Zahl als Baustein. Zahlen sind nicht nur aus Einer gebaut, sondern können auch aus anderen Zahlen gebaut werden.)
5. Zehner-Einer-Gliederung der zweistelligen Zahl (Verständnis der aus Zehn und Zehnerrest gebauten Zahl.)
6. Reversibler Zehner (Verständnis, dass Zehner nicht nur 10 Elemente zu einer neuen Wertebene zusammenfassen und dadurch größere Zahlen strukturieren, sondern dass diese Zehner reversibel sind, also wieder in Einer auflösbar. Auch der Zehner ist eine kardinale Ganzheit!)
7. Idee der Bündelung/ dezimale Wertebenen als Konzept (Verständnis dafür, dass Bündelungen keine Objekte sind, sondern eine Idee, ein fortlaufender Prozess des Zusammenfassens, der der Idee nach ins Unendliche führt.)
8. Symbolische Zahlzeichen / Zahlen als Konventionen (Verständnis dafür, dass äußere Repräsentationen wie konkrete Zahlen oder Zahlzeichen keinen Wert besitzen, sondern diesen erst durch eine Konvention erhalten.)
9. Stellenwertsystem nach oben (Verständnis dafür, dass die Position den Wert anzeigt und dass dieses Prinzip der immer weiteren Bündelung sich durch immer weitere Stellen darstellen lässt.)

Zählreihe, nämlich von der Einheit ausgehend in Einerschritten „und eins, und eins“ einen Zählturm aufzubauen, entspricht nicht dem geistesgeschichtlichen Befund.“ (Menninger, 1958a, S. 57 und S. 17-98)

10. Vollständiges Stellenwertsystem (Verständnis dafür, dass dieses Prinzip durch fortgesetztes Entbündeln auch nach unten, also in die Dezimalbruchteile hinter das Komma, führt.)

Am Anfang steht die Notwendigkeit zu erkennen, dass eine Zahl sich nicht mehr nur auf einen bestimmten Sachzusammenhang bezieht, sondern offen auf jeden anzuwenden ist. ●●● „So viele!“ kann ebenso Kühe wie Tage, Freunde oder Kinder meinen. Im zweiten Schritt geht es um die Erkenntnis, dass sich Zahlen wie ●● und ●●● sichtbar unterscheiden und dass man ihnen daher unterschiedliche Namen gibt. Zahlen werden an dieser Stelle zu Ganzheiten. Und solche Ganzheiten können aus anderen Ganzheiten bestehen.[24] Diese Idee der gebauten Zahl wird für unser Zahlsystem tragend, wenn es um die Zehner-Einer-Gliederung der zweistelligen Zahl geht. Für das Rechnen ist es wichtig, diese Zahlen nicht nur in der Zahlwortreihe aufsagen zu können, sondern deren dezimal gestufte Gliederung zu verstehen. Gerster & Schultz weisen darauf hin, dass außerdem verstanden sein muss, dass der aus zehn Einer aufgebaute Zehner wieder in diese aufgelöst werden kann. Hier geht es um den ‚reversiblen Zehner‘, der zum Baustein des weiteren Ausbaus der Zahlen nach reversiblen dezimalen Wertebenen wird (Gerster & Schultz, 2004, S. 80-94).
Erst die ‚Idee der Bündelung‘, also die Einsicht, dass bei unseren Zahlen immer zehn Elemente eine neue höhere Wertebene erzeugen und diese sich wieder in zehn Elemente der nächstniedrigeren zurückführen lässt, schafft die Option, potentiell immer größerer Zahlen entstehen zu lassen. An dieser Stelle geht es ganz offensichtlich darum, vom materiellen Verständnis der Bündelung als Objekt wegzukommen und zu einem prozeduralen Verständnis von Bündelung überzugehen. Erst die Grundidee des ‚immer so weiter‘ macht es sinnvoll, vom Konzept immer neuer Zeichen für immer neue Wertebenen weg- und zu Stellenwerten überzugehen. Dass dieser Schritt in der Zahlschreibung über mehrere tausend Jahre nicht vollzogen wurde, obwohl er in der Rechenhandlung längst Kulturgut geworden war, belegt die Unzugänglichkeit unserer Stellenwertzahlen, die auf der extremen Verschlüsselung ihres kardinalen Gehaltes beruht. (Menninger, 1958b, S. 205-265)

Die zehn Erkenntnishürden geben den Leitfaden der Inhalte, die es beim Rechnen lernen zu bearbeiten gilt. Es geht dabei weniger um das Erlernen von Zahlwissen und Rechentechniken als um die Entwicklung des inneren Zahlkonzepts. Das Rechnen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau beschreibt die Basis der inhaltlichen Arbeit. Es schafft die materiellen Erfahrungen, die es zu reflektieren, in Sprache zu bringen, sinnvoll weiter zu entwickeln und schließlich durch geeignete Notationsformen zu ersetzen gilt. Die Grundannahme des vorgestellten didaktischen Ansatzes ist es, dass dieses Wechselspiel dem Kind hilft, sein inneres Zahlkonzept so zu entwickeln, dass es unsere im Stellenwertsystem geschriebenen Zahlen zunehmend angemessen dechiffrieren und nutzen kann.

Praktische Konsequenzen des Rechnens mit konkreten Zahlen

Rechnen ganz allgemein als die Lösung eines Größen- oder Anzahlproblems zu verstehen und handelndes Rechnen nicht als Veranschaulichung, sondern als das Operieren mit konkreten Zahlen, hat die Konsequenz, dass die Zahlwortreihe an Bedeutung verliert und der Aspekt der Strukturbildung an Bedeutung gewinnt. Dies wiederum wirkt sich auf den Aufbau des Unterrichts aus, sowohl auf den Umgang mit Zahlenräumen, wie auf die Reihenfolge, in der die Operationen eingeführt werden. Einige wesentliche praktische Veränderungen des Anfangsunterrichts sollen nun dargestellt werden.

[24] Wenn eine Kultur die Zahl Vier mit ‚ein Paar Paare‘ benennt oder die Acht als ‚Vier und Vier‘, dann zeigt das, wie kleinere wahrnehmbare Zahlen zu Bausteinen größerer Zahlen werden. (Menninger,1958a, S. 17ff; Zaslavski 1999, S. 29ff).

Früher Aufbau eines kardinalen Zahlkonzepts (Erkenntnishürden 1-3)

Abb. 2: Wie viele Sorten Schnecken? - So viele!

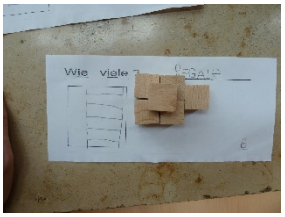

Abb. 3: Wie viele Regale? - So viele!

Abb. 4: Wie viele Kinder haben etwas Blaues an? - So viele!

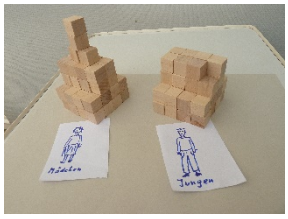

Abb. 5: Gibt es mehr Mädchen oder Jungen?

Die Verortung der Zahl in der mit Holzwürfeln als Zählmaterial konkret abgebildeten Anzahl (Abb. 1-5) erlaubt es, dass alle Kinder in der Klasse in der Lage sind, Zählergebnisse kardinal zu interpretieren und zwar unabhängig vom Stand ihrer Kenntnisse der Zahlwortreihe und von ihren kognitiven Kompetenzen. Die eventuell mit einem Zahlwort oder Zahlzeichen bezeichnete Zahl wird ja gleichzeitig immer durch das für alle sichtbare ‚So viele!' gestützt. Dadurch wird es möglich, im Bereich der Zählanlässe unabhängig von Zahlräumen und allein entlang der Interessen der Kinder oder der Klasse zu forschen.

> *Wie viele verschiedene Schneckensorten finden sich bei den Schnecken, die du aus Korsika mitgebracht hast? Wie viele Regale stehen in unserer Klasse? Wie viele Kinder haben heute etwas Blaues an? Gibt es in den ersten Klassen mehr Mädchen oder mehr Jungen? Die Beispiele zeigen, dass diese Zählanlässe etwas anderes sind als Übungen zum Aufsagen der Zahlwortreihe. Es sind echte Fragen, die den Ausgangspunkt bilden. Und es sind kooperative Prozesse, in denen die Antworten gefunden werden. Es geht um die Sache, nicht um die Zahl. Die Zahl ist nur das Mittel zum Zweck. (Siehe: Erkenntnishürde 1)*

Dabei wird, selbst bei denen, die die Zahlwortreihe noch nicht oder nur rudimentär kennen, Wesentliches über Zahlen gelernt:

- Zahlen zeigen bedeutungsvolle Anzahlen der Wirklichkeit, sind also ihrem Wesen nach kardinal. Das schließt den Aspekt der Invarianz ein, da hinter der durch analoge Abbildung gewonnenen konkreten Zahl ja der Zählvorgang steht. Die Würfel zeigen die Anzahl, egal ob sie ungeordnet oder geordnet präsentiert werden. Sie sagen: Es waren ‚*so viele*' oder ‚*so oft*'. (Erkenntnishürde 1 und 2)

- Der ursprüngliche Zählinhalt verschwindet bei der Zahlbildung. ●●● kann für drei Geschwister stehen oder für drei Blumen am Fenster oder die drei Teile der Tafel. Die Zahl steht also für eine ganze Klasse unterschiedlicher, aber gleich anzahliger Wirklichkeit. (Erkenntnishürde 2)
- Man kann diese konkreten Zählergebnisse vergleichen. Dabei gelingt das allein durch die Anschauung nur dann, wenn Zahlen oberhalb der Vier durch Muster und Gebäude nach der Regel *‚Nie mehr als vier in einer Reihe!‘*. Dadurch können auch sehr große Zahlen wie die Anzahl der Mädchen und Jungen im Jahrgang in Abb.5 allein aufgrund der Wahrnehmung verglichen werden. (Erkenntnishürde 3 und 4)
- Die Zahlwörter der Zahlen im kleinen wahrnehmbaren Zahlenraum bis vier lassen sich ohne Abzählprozess bestimmen. Diese Zahlwörter geben der Größe nach geordnet den Anfang der Zahlwortreihe. (Erkenntnishürde 3)

Es sind die Zahlbausteine ● bis ●●●●, die hier in den Fokus gerückt werden, weil es für diese ohne Zählprozess wahrnehmbar unterschiedlichen Zahlen früh Sinn gibt, Begriffe einzuführen. Die Zahlwörter entstehen nicht aus der Reihe, sondern werden als Namen für Unterscheidbares verstanden.

Das Zählgeschehen und das Übersetzen in strukturierte, wahrnehmbare zweidimensionale und dreidimensionale Muster führt dazu, dass die Kardinalität der Zahl einschließlich der Invarianz von Anfang an erfasst wird, weil die Zählergebnisse nur unter dieser Voraussetzung Antwort auf die sachlichen Fragen bieten. Gleichzeitig lernen die Kinder die Bedeutung unser aller Wahrnehmungsgrenzen kennen und kommen aus dieser Erfahrung heraus ganz natürlich (im Sinne Wagenscheins ‚genetisch‘) zu den Aspekten Ordnung und Strukturierung. Es bedarf keiner Verlagerung dieser Aspekte in didaktische Veranschaulichungsmittel, die neben der Zahl selbst zusätzlich in den Unterricht eingebracht werden müssen. Wir brauchen keine gefärbten Perlen und keine Fünferlinie auf dem 20er-Feld, um strukturorientiertes Denken zu fördern. Das Interesse an Strukturen entsteht aus dem erfahrbaren Problem des nicht mehr spontan möglichen Vergleichs zweier zu großer Zahlen. Ordnen und Strukturen bilden werden als Alternativen zum Abzählen in der Zahlwortreihe ganz automatisch sichtbar und produktiv erfahren. (Zur ‚Mathematik als Wissenschaft von Mustern‘, siehe Müller et al., 2004, S. 11)

Außerdem führt die Musterbildung dazu, dass es Sinn gibt, über die Muster zu sprechen. So kann man die Frage stellen, welche Zahlen an diesen sichtbar sind. Die neun Würfel in Abb. 6 repräsentieren die Tatsache, dass das Auto neun Lineal-Längen weit gefahren ist. Aber die Frage nach den sichtbaren Zahlen ignoriert diesen sachkundlichen Gehalt. Sie lenkt den Blick auf die wahrnehmbaren Zahlbausteine der Neun. Wir sehen die Drei. Und wenn wir das Gebäude dann auseinandernehmen, dann sehen wir, dass da „dreimal die Drei“ ist. An dieser Stelle können wir die symbolische Schrift der Mathematik einführen, um die gesprochenen Sätze auf einfache Weise aufzuschreiben: $3 \cdot 3$. Dreimaldrei ist ein Muster, das wir auch in Abb. 2 bei den gelegten neun Schneckenarten sehen, deren konkrete Zahl aber anschließend ganz anders gebaut wurde, nämlich als $2 \cdot 3 + 2 + 1$. (Erkenntnishürde 3 und 4)

Abb. 6: Wie weit ist das Auto gefahren? – So viele Lineal-Längen!

Terme sind Sätze, die Gebäude beschreiben, und sie können als Bauanleitungen für Gebäude dienen. Baue $3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 1$ (Rödler, 2016a, S. 88ff, 2016b, S. 29ff). Auf diese Weise wird ein Teil der mathematischen Schriftzeichen kennengelernt. Auch dies geschieht wieder im wahrnehmbaren Bereich bis Vier, also in dem Bereich, der im ersten Schritt kardinal aufzubauen ist, so dass diese vier Zahlbausteine mit den Worten und Zeichen verbunden und als Zahlen ohne Zählprozess abgerufen werden können. Blitzerfassungsübungen unterstützen die Botschaft: *Du musst nicht zählen!* Zahlen entstehen nicht aus dem Zählprozess. Der Zählprozess ist eine Notlösung zur Bestimmung der Zahl, wenn die Wahrnehmung überfordert ist.

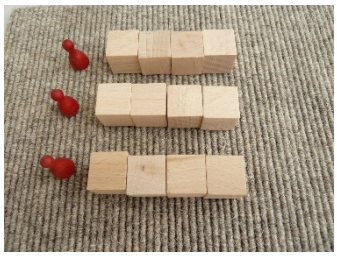

Abb. 7: $3 \cdot 4 = 12$ / $12 : 3 = 4$

Parallel zum konkreten Zählen und der Arbeit mit den als Gebäude sichtbar gemachten konkreten Zahlen wird von der ersten(!) Schulwoche an gerechnet (Rödler, 2016a, S. 72 ff und S. 104 ff, 2016b, S.10ff und 41ff). Allerdings geschieht dies nicht mit dem Ziel, das Zählen zu nutzen oder frühe Kopfrechenkompetenz aufzubauen. Das Ziel ist, wie bei den Gebäuden, den Blick auf Strukturen und Zahlbausteine zu richten. Es soll verstanden werden, dass Rechnen etwas mit Ordnung und Struktur, mit Teil und Ganzem zu tun hat. (Erkenntnishürde 3 und 4) *Dem Missverständnis, dass Rechnen Zählen sei und dass es um eine Optimierung des Zählprozesses geht, soll von Anfang an entgegengewirkt werden.*

Aus diesem Grund wird nicht mit den linearen Operationen (Addition und Subtraktion) begonnen, und insbesondere nicht mit der Addition, die unmittelbar zum Anknüpfen an die Zahlwortreihe verleitet. Der Einstieg ins Rechnen erfolgt über Multiplikation und Division, weil diese Operationen Muster mit gleichen Zahlbausteinen zeigen (Abb. 7). $3 \cdot 4 =$ wird im Sinne von „Da sind drei Kinder und jedes hat vier Würfel." auf dem Rechenteppich dargestellt und gelöst. Dies erfordert, dass die Vier dreimal gelegt wird. So wird dieser Zahlbaustein ‚Vier' gefestigt und auch das noch zählende Kind wird die späteren Vierer an den bereits gelegten orientieren. Zwar muss das Ergebnis zählend ermittelt und eventuell mit Hilfe einer Zahlzeichentabelle (Rödler, 2007, 45) notiert werden. Das Ausrechnen ist ein Nebeneffekt, ebenso wie die Tatsache, dass reife Kinder hier ein erstes basales Einmaleins-Wissen aufbauen oder genauer gesagt, die Kenntnis von Zahlen wie 6, 8, 9, 12 und 16 als quasisimultan erfassbare Muster. Im Kern geht es darum, die Zahlbausteine bis 4 zu festigen sowie strukturelles und operationales Wissen aufzubauen: $3 \cdot 4 = 4 \cdot 3$ Die Endstellung der Division $12 : 3 = 4$ ist die gleiche Stellung wie die Ausgangsstellung der Aufgabe $3 \cdot 4 =$. Die Multiplikation ist die Antwort auf die Division, da beides Gegenoperationen sind. Solche Zusammenhänge werden beobachtbar und daher besprochen.

Der Einstieg über Multiplikation und Division hat einen zweiten bedeutsamen Effekt. Er führt die Klasse in einen gemeinschaftlichen Arbeits- und Lernprozess. Alle(!) Kinder rechnen handelnd. ‚*Was keiner weiß, ist inklusiv!*', benennt eine mir wichtig gewordene Erkenntnis, die didaktisch beachtet werden sollte. Anders als beim Einstieg über eine Addition wie $3 + 4 =$, bei der ein Teil der Klasse die Lösung schon kennt, ein anderer sie schnell zählend ermittelt und der dritte nicht weiß, worum es geht, schafft die Aufgabe $3 \cdot 4 =$ eine Situation, die nivelliert. Auch die Leistungsstärksten wissen diese Lösung nicht spontan und sind daher bereit, sie handelnd zu ermitteln. Handelndes Lösen wird als legitimes Verfahren kennengelernt und ist kein Kennzeichen des schwachen Rechners.

Erstes Rechnen und erste Automatisierung im Teile-Ganzes-Prinzip (Erkenntnishürden 1-4)

Wenn es im nächsten Schritt darum geht, zu einem Rechnen mit abstrakten Zahlzeichen, das heißt zum Aufbau eines auf dem Teile-Ganzes-Prinzip beruhenden operativen Wissens im Bereich von Addition und Subtraktion zu kommen, so zeigt sich, dass dieses über die Subtraktion besser gelingt als über die Addition. ‚*Subtraktion vor Addition!*' ist eine weitere zentrale Änderung des Anfangsunterrichts. Diese Umkehrung der Operationsfolge bietet sich an, weil das Rechnen durch die Rechenhandlungen mit konkreten Zahlen strukturorientiert und nicht an der Zahlwortreihe orientiert kennengelernt wird.

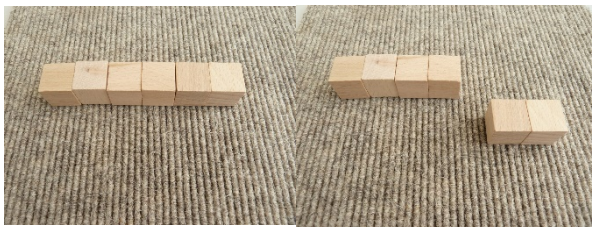

Abb. 8: 6 – 2 = 4

Während bei der Addition Teile operational zusammengeführt werden, also ein Größeres entsteht, was nur noch zählend ermittelt werden kann, teilt die Subtraktion den Minuenden in zwei kleinere Bausteine auf. Er wird zerlegt. Und diese Zerlegung wird sichtbar, wenn wir den Subtrahenden nicht verschwinden, sondern auf dem Rechenteppich liegen lassen (Abb. 8). Subtraktionen im kleineren Zahlenbereich sind auf diese Weise häufig auf Grundlage des Subitizing lösbar. Der sichtbar durch die Subtraktion zerlegte Minuend erlaubt es zugleich, den operativen Zusammenhang zu thematisieren ($6-2=4$ / $6-4=2$ / $2+4=6$ / $4+2=6$). Die Addition erscheint, im Anschluss an die Behandlung der Subtraktion, in ganz anderem Licht; nämlich als Gegenoperation, die getrennte Bausteine wieder zusammenführt.

Diese Handlungserfahrungen mit konkreten Zahlen machen uns und den Kindern deutlich, dass sicheres Rechnen auf einem abrufbaren Zerlegungswissen aufbaut. Dieses ist aber im Blick auf alle Zerlegungen bis 10 im Anfangsunterricht nicht vorhanden. Zerlegungshäuser der 7 oder 8 zwingen, zu früh behandelt, das Kind dazu, Abzählprozesse auszuführen. Beschränkt sich der Unterricht aber in dieser frühen Phase der ersten Automatisierung auf den Zahlenraum bis 5, so können auch sehr leistungsschwache Kinder das dafür notwendige Zerlegungswissen ohne Zählprozess aufbauen, weil diese sechs Zerlegungen (1/1, 1/2, 1/3 und 2/2, 1/4 und 2/3) vom protoquantitativen Wissen und der Kenntnis der Zahlbausteine bis 4 gestützt werden.

Nicht unerwähnt soll bleiben, dass bei der handelnden Lösung von Subtraktionen auch Aufgaben mit Null und auf dieser Stufe unlösbare Aufgaben angeboten werden sollten, also z.B. Paare wie $5-3=$ / $3-5=$ und Päckchen wie $4-2=$ / $4-4=$ / $2-2=$ / $2-4=$. Früh soll der Blick darauf gelenkt werden, dass die Subtraktion eine Operation mit Richtung ist, so dass auch dadurch späteren Fehlern wie $13-5=12$ vorgebeugt wird. Außerdem ist es bedeutsam, dass das Zerlegungswissen nicht unabhängig vom Rechnen, sondern im direkten Zusammenhang mit den zugehörigen Additions- und Subtraktionsaufgaben aufgebaut wird (Rödler, 2007, S. 47ff, 2016a, S. 46f, 2016c, S. 14ff und 43ff).

Aufbau des Konzepts vom reversiblen Zehner (Erkenntnishürden 5-7)

Ein zweiter wesentlicher Unterschied zum vertrauten Lehrgang betrifft die Öffnung des zweistelligen Zahlenraumes und insbesondere den Zeitpunkt und die Art der Thematisierung des Zehners.

Sehr häufig wird der zweistellige Zahlenraum beim Rechnen – zunächst bis 20, später bis 100 – über Analogieaufgaben eingeführt. Im zweiten Schritt wird dann der Zehnerübergang behandelt und zwar erst bei der Addition, dann bei der Subtraktion. Die Praxis zeigt, dass genau an dieser Stelle viele Kinder auffällig werden, in zählende Verfahren zurückfallen und insbesondere die leistungsschwachen Kinder ganz aussteigen (Gerster & Schultz, 2004, S. 129ff, S. 195ff). Kardinales Denken wird ersetzt durch das Rechnen mit Tricks, welche z.B. die Ziffern als Zahlen missbraucht: „Bei $15-2=$ rechne ich $5-2$ und vorne kommt die 1 hin.“ „Bei $45-23=$ rechne ich vorne $4-2$ und hinten $5-3$.“

Dieses aus der erfolgreichen Bewältigung von Analogieaufgaben gewonnene und durch diesen Erfolg verstärkte falsche Denken, wird auf Aufgaben wie $12-5=$ und $43-25=$ übersetzt, die dann mit 13, bzw. 22 gelöst werden. Die Ursache liegt darin, dass wesentliche Grundlagen (Gerster & Schultz, 2004, 76ff) bei vielen Kindern Mitte des ersten Schuljahres nicht vorhanden sind.

Ganz offensichtlich haben viele Kinder gar kein Zehner-Einer-Konzept aufgebaut. Zählende Rechner, die vielleicht nicht einmal im Teile-Ganzes-Prinzip rechnen, kennen 12 und 13 nicht als gegliederte Zahlen, sondern eben nur als Glieder einer immer länger werdenden Zahlwortfolge: …, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, … Die

Zahlworte Zehn-Elf-Zwölf machen die Bedeutung der Zehnergrenze nicht deutlich.[25] Ein weiteres Problem ist, dass sich der Zehner, anders als z.B. bei der mittelalterlichen Schreibweise XII und XIII, in unseren Stellenwertzahlen 12 und 13 nicht zeigt. Er muss in die Ziffer 1 hineingelesen werden. Das beweist die extreme Verschlüsselung der kardinalen Botschaft in unseren Stellenwertzahlen. Viele Kinder wissen schlicht nicht, worum es geht, wenn wir sie ‚zum Zehner und darüber' rechnen lassen und übersetzen dies allenfalls mit ‚zur Zehn und danach', also aus dem Blickwinkel ihres Zahlwortreihenkonzepts. Außerdem besitzen Kinder in dieser frühen Phase des Rechenlernprozesses das Zerlegungswissen nicht, das für ein gedankliches Rechnen in Schritten notwendig ist. Dafür müssten sie alle 45 Zerlegungen bis 10 spontan abrufbar und im operativen Zusammenhang anwendbar kennen. Der Rückfall ins zählende Lösen ist daher zwangsläufig.

Wenn man aber nicht vom Ziel des Dezimalsystems ausgeht, sondern allgemeiner von dem Bedürfnis, auch Rechnungen mit Zahlbausteinen oberhalb der Vier wahrnehmungsgestützt durchführen zu können, so erscheint nicht der Zehner als bedeutsame Hilfe, sondern der Fünfer als nächste hilfreiche Struktur (Gerster & Schultz, 2004, S. 364ff; Rödler, 2007). Ein Blick in die Kulturgeschichte zeigt, dass die Regel ‚Nie mehr als vier in eine Reihe!' neben der Musterbildung (ägyptisch), nicht die Zehner- sondern die Fünferstruktur als erste Gliederungsebene hervorgebracht hat: Man findet sie auf frühen Kerbhölzern ebenso wie bei den Mayas, in alten chinesischen Schriftzeichen oder beim V der mittelalterlich-römischen Zahlen. Es ist also plausibel, an dieser Stelle ein Fünferelement ins Spiel zu bringen, weil dieses ausreicht, Zahlen wie 8 und 7 spontan wahrnehmbar zu legen. Und mehr als das: Der Einsatz der Fünferstangen erlaubt es zugleich, typische Aufgaben mit Zehnerübergang in der Logik des Verdoppelns wesentlich auf der Basis der Wahrnehmung zu lösen, da die 10 bei $8 + 7 = 15$ aus der Doppel-5 entsteht und der Zehnerrest wahrnehmbar aus den Fünferresten $3 + 2 = 5$ gebildet werden kann (Abb. 9).

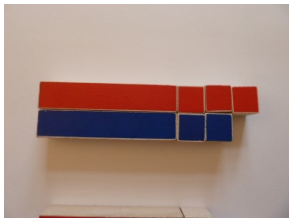

Abb. 9: 8+7=15 ohne Zehnerübergang

Bewusst wird diese Fünferstruktur nicht wie am Rechenrahmen oder dem 20er-Feld allein über Färbung oder die Gliederung der Einer erzeugt, sondern es wird an dieser Stelle das Abstraktionsniveau der konkreten Zahl verändert: von *‚analoger Abbildung'* nach *‚konkreter Bündelung'*. Wieder geht es unter didaktischem Blickwinkel beim Rechnen weniger um das oberflächliche Lösen von Aufgaben, sondern um die Erfahrung einer bestimmten Handlungsidee, die das Konzept des reversiblen Bündelungsobjekts ins Spiel bringt und damit implizit den reversiblen Zehner vorbereitet.

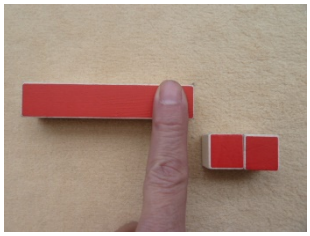

Abb. 10: 7-3=4 durch virtuelles Entbündeln

Mit der Fünferstange, welche die sie konstituierenden fünf Einer nicht mehr zeigt, wird das Kind gezwungen, diese in die Stange hineinzudenken. Ob das wirklich gelingt, zeigt sich bei Subtraktionen wie $7 - 3 =$. Anders als am 20er-Feld, beim Rechenrahmen oder an der Perlenkette, wo die Fünferordnung ignoriert und weiter

[25] Auf den nachteiligen Effekt dieser Tatsache weist auch Fuson hin, wenn sie die Kompetenzen von amerikanischen und chinesischen Kindern in diesem Bereich vergleicht und feststellt, dass Letztere aufgrund der in ihrer Sprache bereits beim ersten Zehner regelmäßigen Zahlbildung weniger Probleme beim Aufbau der dekadisch gegliederten Zahlwortreihe haben. Auch die Tendenz, Zehnerübergänge nicht im Blick auf die Zehnergrenze, sondern weiterzählend zu lösen, scheint von solchen kulturellen Hintergründen beeinflusst (Fuson, 1988, S. 44ff)

über die Grenze hinweg abzählend gedacht und gerechnet werden kann, erfordert die Verwendung eines Bündelungsobjektes ganz klar ein Rechnen in Schritten. Man kann nur zwei Würfel wegnehmen, weil nur zwei Würfel da sind! Der dritte muss gedanklich (‚virtuell') aus dem Fünfer herausgelöst werden. Das setzt voraus, dass dieser Fünfer als auflösbare Zusammensetzung von fünf Einer im Sinne einer „abstract collectible unit" (Gerster & Schultz, 2004, S. 92f) gedacht wird und dass die Zerlegungen der 5 (1/4 und 2/3) bekannt und abrufbar sind. Hier zeigt sich die Bedeutung eines abrufbaren Zerlegungswissens und zugleich der Vorteil der Fünferstange, weil diese nur wenig und besonders einfaches Zerlegungswissen erfordert.

Das Thema ‚Rechnen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau' wird am Aufbau des ersten Schuljahres sehr schön sichtbar und zeigt zugleich, wie dadurch ein genetischer Lernprozess nach dem Spiralprinzip (Wittmann, 1981, S. 84-86) möglich wird. Der Einstieg ins Rechnen erfolgte mit homogenem Material auf der Stufe ‚analoge Abbildung'. An der Stelle der Zahlraumöffnung wird das Abstraktionsniveau auf die Stufe ‚konkrete Bündelung' gesteigert, weil dadurch typische Rechnungen mit Zehnerübergang in der Logik des Verdoppelns lösbar werden, was das Beachten und Nutzen von Strukturen fördert. Gleichzeitig wird bei der Subtraktion zum ersten Mal die Bedeutung eines reversiblen Bündelungsobjekts erfahren. Diese Kompetenz wird dann auf das Rechnen mit 5-Cent und 1-Cent-Münzen übersetzt, also auf die Abstraktionsstufe ‚symbolische Bündelung' angehoben. Die Aufgaben werden nicht schwerer, aber es wird geprüft, ob die Zahlen bereits so weit im Innern verständig strukturiert aufgebaut sind, dass die Aufgaben auch ohne die Signale eines materiell in seiner Dimension sichtbaren Fünfers gelöst werden können.[26] Und nun, wenn zur Fundierung der Zehner-Einer-Gliederung der zweistelligen Zahl in den großen Zahlenraum bis und über 100 gewechselt werden soll, wird das Abstraktionsniveau wieder auf die Stufe ‚analoge Abbildung' abgesenkt, getreu der Regel*: Immer wenn die Zahlen groß oder die zu verstehende Sache schwierig wird, hilft die Absenkung des Abstraktionsniveaus*, weil sich auf niedriger Stufe die kardinalen Zusammenhänge unverschlüsselt zeigen. Dies stellt sicher, dass alle Kinder ohne weitere Differenzierung an diesem Unterrichtsschritt verständig beteiligt sind.

Abb. 11: Große Anzahlen durch dezimale Sortierprozesse sichtbar machen

Große Anzahlen werden durch dezimales Sortieren und durch Musterbildung auf den Wertebenen sichtbar gemacht. Aufgabe ist es, eine Form zu finden, durch welche die gelegte Anzahl wie eine geschriebene Zahl mit einem Blick erfasst und benannt werden kann (Abb. 11). Ein Foto der gelegten Anzahl soll die Zahl unmittelbar zeigen. Dabei werden die Zahlwörter und Zahlzeichen mit der wahrnehmbaren, gegliederten Anzahl in Verbindung gebracht. Es zeigt sich, dass bei 64 die ‚6' gar keine 6 ist, sondern für die sechs Haufen, also für Sechzig steht. Nur die ‚4' ist wirklich eine 4. Entsprechend steht die ‚1' in 132 für den großen Haufen und damit für hundert Bohnen. Die ganzen Hundert stecken in der ‚1'! Das macht unser Stellenwertsystem. Es ist also wichtig, dass wir beim Lesen mehrstelliger Zahlen in Werten denken und nicht die Ziffern als Zahlen lesen.

Bevor im ersten Schuljahr Zehner und Zehnerübergang behandelt werden, wird der mehrstellige Zahlenraum (nicht die Zahlwortreihe) als Vorbereitung aufgebaut. Nicht „Wie viel ist 100?", heißt die Frage, sondern: „Wie werden aus Einer Zehner und aus Zehner Hunderter?" „Wie werden aus diesen Bausteinen größere Zahlen

[26] Interessierte Kinder können übrigens an dieser Stelle durch eine einfache Erweiterung des Rechenmittels um neun 10-Cent-Münzen bereits strukturgleich im Zahlenraum bis 100 addieren, da Aufgaben wie $45 + 8 =$ kaum größere Herausforderungen stellen als $5 + 8 =$. Und diese „Rampe" nach oben ist anders als bei Krauthausen & Scherer (2014, S. 53) nicht für die Leistungsstarken reserviert, sondern wurde in meinem Unterricht sogar von Kindern aus dem Lernhilfebereich genutzt.

gebaut?“ Und: „Wie zeigen sich diese in den Zahlzeichen?“ Mehrstellige Zahlen sollen wie die ägyptischen oder römischen aus reversiblen dezimalen Bausteinen zusammengesetzt gedacht werden. Natürlich gibt es Sinn, an dieser Stelle auch die Zahlwortreihe ins Spiel zu bringen und zu üben. Oberhalb der 20 ist sie nämlich – anders als darunter – nach dem Muster ‚immer zur 9, dann ein neuer Zehner und dann wieder von vorne‘ gebaut. Oberhalb der Zwanzig wird die Zehner-Einer-Gliederung im Zählrhythmus erfahrbar und kann jetzt auch das Rechnen im Blick auf die Zehnergrenze unterstützen. Aber dies steht nicht im Vordergrund. Und es ist keine Voraussetzung für das Rechnen auf diesem Verstehens-Niveau.

Abb. 12: $34 + 29 = 63$, gelöst über einen Sortierprozess

Solche in Sortiervorgängen sichtbar gemachten Anzahlen lassen sich als konkrete Zahlen nutzen und zum Rechnen verwenden. Abb. 12 zeigt, wie die Aufgabe $34 + 29 =$ zunächst in den einzelnen Summanden auf der Stufe ‚analoge Abbildung‘ gelegt wird. In der Zusammenfassung geht es nun darum, die Summe durch Umordnen sichtbar zu machen. Dies geschieht am einfachsten, wenn im ersten Schritt eine Erbse als ‚Eins‘ aus der gelegten ‚Vier‘ herausgenommen und zur ‚Neun‘ dazu gelegt wird, wodurch beim zweiten Summanden rechts ein dritter Zehnerhaufen entsteht. Danach kommt es nur noch darauf an, die sechs Haufen in ein spontan wahrnehmbares Bild zu bringen und dieses in das zugehörige Zahlzeichen ($= 63$) zu übersetzen.

Mit solchen Themenstellungen und Lösungshandlungen lässt sich das wichtige Zehner-Einer-Konzept im zweistelligen Zahlenraum aufbauen und es lässt sich Zeit gewinnen, um das für den Zehnerübergang wichtige operative Zerlegungswissen[27] zu trainieren. Erst auf dieser Grundlage gibt es Sinn, zu einem späteren Zeitpunkt, etwa im Mai, zum eigentlichen Zehnerübergang zu kommen. Wobei es im ersten Schuljahr um ein erstes Erfahrungen sammeln geht, an das im zweiten Schuljahr, dann mit noch besseren Voraussetzungen hinsichtlich der Grundlagen, angeknüpft werden kann.

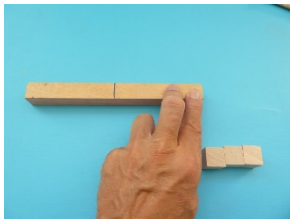

Abb. 13: $13 - 5 = 8$ Die Zehnerstange zwingt zum Rechnen in Schritten

Wie schon beim Einstieg ins Rechnen im kleinen Zahlenraum zeigt sich auch beim Einstieg in den Zehnerübergang, dass die Subtraktion besser als die Addition geeignet ist, ohne viel verbale Einflussnahme ganz automatisch zu einem die Strukturen nutzenden Rechnen zu kommen. Auch hier gilt die Regel: *‚Subtraktion vor Addition!‘* Um eine Aufgabe wie $8 + 5 =$ weder auf Fünferbasis (Zwei Fünfer und 3, also 13.) noch weiterzählend (8, 9,10,11,12,13) zu lösen, muss es ein Bedürfnis geben, zum Zehner und darüber zu rechnen. Im ersten Schuljahr ist dieses aber noch nicht bei allen Kindern entwickelt. Der Zehnerübergang der Addition hat dadurch als Einstieg für diese Kinder etwas Künstliches, etwas, was von außen an die Kinder herangebracht werden muss; etwas wovon sie überzeugt werden müssen.

Ganz anders ist es, wenn man das Abstraktionsniveau wieder anhebt und unter der Verwendung einer Zehnerstange Aufgabenpäckchen des Typs $13 - 2 = / 13 - 4 = / 13 - 3 = / 13 - 1 = / 13 - 5 =$ rechnen lässt

[27] Operatives Zerlegungswissen ist solches, das nicht isoliert vom Rechnen existiert, sondern direkt im Zusammenhang mit diesem erworben wird. Mit der Kenntnis der Zerlegung von 7 nach 2 und 5 können alle folgenden Aufgaben ohne Zählprozess gelöst werden: $7 - 2 = / 7 - 5 = / 7 - _ = 2 / 7 - _ = 5 / 5 = 7 - _ / 2 = 7 - _ / 2 + _ = 7 / 5 + _ = 7 / _ + 2 = 7 / _ + 5 = 7 / 2 + 5 = / 7 = 2 + _ / 7 = 5 + _ / 7 = _ + 2 / 7 = _ + 5$. Aufgabe des Unterrichts ist es daher, die Zerlegungen langsam und schrittweise zu trainieren, aber eben immer in diesem operativen Zusammenhang. (Rödler, 2016c)

(Abb. 13). Solche aus Analogie- und Zehnerübergangsaufgaben *‚gemischten Päckchen‘* (Rödler, 2016a, S. 156, 2016c, S. 59ff, 2020a, Video 16) machen in der Rechenhandlung deutlich, dass es manche Aufgaben gibt, bei denen die Subtraktion bereits mit den vorhandenen Würfeln vollzogen werden kann und andere, wo für die direkte Subtraktion nicht genügend Würfel vorhanden sind. Dieser Unterschied zwischen $13 - 5 =$ (geht nicht) und $15 - 3 =$ (geht) soll thematisiert werden.

Von diesem Moment an werden entsprechende Päckchen immer erst gefiltert. Im ersten Schritt werden nur die Aufgaben gerechnet, bei denen man auf Einer-Ebene subtrahieren kann. Die ‚schwierigen Aufgaben‘, bei denen das nicht geht, werden zunächst nur angekreuzt. Das schärft den Blick für die Bedeutung der Zehnergrenze, hilft bei Analogieaufgaben die kardinale Grundlage mitzudenken, statt die Ziffern für Zahlen zu nehmen und erlaubt schließlich, den zweiten Schritt als Gedankenschritt zu formulieren: „Bei $13 - 5 =$ fehlen mir Zwei. Die muss ich aus der Zehnerstange herausholen!“

Der Zehnerübergang soll nicht an das Kind herangetragen, nicht ‚beigebracht‘ werden. Er wird vom Kind durch die Arbeit mit Zehnerstange und Würfeln als Notwendigkeit erkannt und formuliert.

Alles, was noch zu tun ist, das ist, diesem Denken eine symbolische Form zu geben, also passende Notationsformen zu finden, die als vorgestellte Handlungen die Handlung selbst ersetzen. Mit so einer die Handlung verständig ersetzenden Notation hat das Kind zugleich den ersten Schritt zu einem strukturierten Kopfrechnen gemacht, das irgendwann dieser Stützung nicht mehr bedarf (Rödler, 2016a, 91f, 140ff, 155ff; vergl. Müller, G. &Wittmann E. 1993, S. 8585 ff). Dieser Schritt geschieht im ersten Schuljahr eher als ein erstes Kennenlernen. Erst im zweiten Schuljahr sind die Grundlagen in der Breite der Kindergruppe hinreichend gefestigt, dass dieser Weg von allen verständig beschritten werden kann.

Zusammenfassung und Ausblick

Die bisher dargestellten Veränderungen des Anfangsunterrichts[28] zeigen, wie tiefgreifend der Unterricht des ersten Schuljahres zu ändern ist, wenn man der Verfestigung zählenden Rechnens frühzeitig entgegentreten will, wenn man die Erfahrung kardinaler Strukturen und operativer Vorgänge in den Mittelpunkt des Rechnens stellt und nicht das Lösen von Aufgaben, deren innere Logik sich aus dem Einstieg über die Zahlwortreihe ergibt. Sie lassen ahnen, wie auf dieses erste Schuljahr im weiteren Verlauf weiter aufgebaut werden kann: Denn, was sich in den weiteren Schuljahren verändert, sind nur die Zahlenräume, in denen gerechnet wird, und ist der Grad der Automatisierung im Bereich des Einspluseins und Einmaleins. Was sich aber nicht verändert, das ist das in konkrete Zahlen übersetzte operative Geschehen (addieren - zusammenfügen, subtrahieren - aufteilen, multiplizieren - gleiche Bausteine zusammenfügen, dividieren - in gleiche Bausteine aufteilen). Ebenso wenig ändert sich, dass Musterbildungen und reversible Bündelungsobjekte zwei leistungsstarke Hilfsmittel darstellen, die es erlauben, sogar große Rechnungen aller vier Grundrechenarten bis in den vierstelligen Bereich hinein verständig durchzuführen. Was sich ebenfalls nicht ändert, das ist, dass diese wiederkehrenden Vorgänge besprochen, reflektiert und in Schrift (halbschriftliche und schriftliche Verfahren, Rechenstrich und weitere abgeleitete Notationsformen (z.B. Schiebenotation, Wechselgeldnotation) übersetzt werden, was seinerseits zu einem verständigen Rechnen mit unseren abstrakten Zahlen hinführt. Und was sich nicht ändert, das ist, dass wir so oft wie möglich Zähl- und Rechenprozesse als Hilfen benutzen, um interessante Frage- und Problemstellungen zu lösen. Die Welt der Zahlen soll eine dienende Funktion haben! (Rödler, 2006a, 2016a, 2016f)

Gründe für die Wirksamkeit des Vorgehens

Was ist es, was das hier beschriebene Vorgehen – insbesondere im Blick auf gefährdete Schülergruppen – effektiv werden lässt? An dieser Stelle möchte ich einige besonders eindrückliche Effekte pädagogisch und fachdidaktisch weiter untermauern und damit auch pädagogisch, didaktisch und fachdidaktisch anbinden.

[28] Rechnen mit konkreten Zahlen statt abstrakten Zahlen, wahrnehmungsgestützte Handlungen statt Zählprozesse, Muster und Strukturbildung statt strukturierte Anschauungsmittel, beim Thema Zehnerübergang: Bündelungsobjekte statt Ordnungen, gemischte Päckchen statt vorgezogener Analogieaufgaben, Erstes Rechnen im ganz kleinen Zahlenraum bis 5 und Öffnung des ganz großen Zahlenraumes bis über 100 statt frühes Rechnen im Blick auf den Zehner, Subtraktion vor Addition, Notation als vorgestellte Rechenhandlung

„Wenn das Vollkommene anbricht, hat das Unvollkommene keinen Platz mehr“, schreibt Rumpf (1981, S. 60) und greift damit einen Gedanken auf, der schon in der Arbeitsschulbewegung formuliert wurde.

> *„In der Schule muss zu jeder Zeit alles vollkommen sein.“* Sie verlangt *„statt einem Ganzen, das unvollkommen ist, Teile die vollkommen sind und zu einem vollkommenen Ganzen zusammengesetzt werden können.“*
>
> *„Die Arbeitsschule ist eine Erarbeitungsschule. … Ein Erarbeiten setzt Grade voraus. Grade sind bedingt durch das Unvollkommene, das zum Vollkommenen werden will.“ (Gläser, 1911; zit. nach Rödler, 1987, S. 92)*

Der hier als ‚Mathe inklusiv‘ vorgestellte Unterricht folgt zwar einer inneren Systematik, die sich daraus ergibt, dass die genannten Erkenntnishürden stets im Auge sind und auf diese hin die verschiedenen Erfahrungsfelder (mathematische Projekte, Zählanlässe, Rechenhandlungen auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau) gestaltet werden. Dies bedeutet aber nicht, dass eine nach der anderen abgearbeitet wird. Vielmehr werden komplexe Situationen geschaffen, die den Zugriff auf unterschiedlichen Verstehens-Ebenen gleichzeitig zulassen und damit genetisches Lernen und natürliche (Selbst-)Differenzierung ermöglichen (Wagenschein, 1970; Wittmann, 1981, 1993; Müller et al., 2004; Moser Opitz, 2008, S. 106-113; Krauthausen & Scherer, 2014).

Ein schönes Beispiel hierfür ist der Schultagezähler (Rödler, 2007, S. 46, 2016a, S. 11, 2020, Video 3). An diesem erkennt das eine Kind einfach nur die materiell wachsende Anzahl der Würfel, die es mit den vergangenen Schultagen in Zusammenhang bringt und bildet auf dieser Ebene sein Verständnis der kardinalen Zahl, die noch stark an den Sachzusammenhang gekoppelt ist. Ein anderes Kind lernt durch den täglichen (strukturierten) Abzählvorgang die Zahlwortreihe und durch das Notieren, dass Zahlen in Zeichen aufgeschrieben werden. Ein drittes versteht, wie der mehrstellige Zahlenraum sich aus Einer, Zehner und später auch Hunderter zusammensetzt und wie sich diese kardinale Realität in unserer Stellenwertschreibweise abbildet. Es ist gar nicht nötig, dass alle das Gleiche verstehen. Jeder versteht das, was ihm zu diesem Punkt zugänglich ist. Und dieses Teilverständnis wird nicht kritisiert, nicht korrigiert, nicht einmal ernsthaft zur Kenntnis genommen. Die Tatsache, dass sich die Zahlwortreihe nach jedem hundertsten Schultag, wenn die 100 Schultage in eine 2 m lange Hunderterstange umgetauscht worden sind, auf der Einer-und-Zehner-Ebene wieder erneut von 1 an aufbaut, stellt sicher, dass alle hundert Tage eine Wiederholung des immer gleichen Vorgangs stattfindet, so dass nach und nach alle Kinder zu einem umfassenden Verständnis vordringen. Und gelingt dies im ersten und zweiten Schuljahr nicht, so kann man im dritten einen ‚Schultagezähler-Dienst‘ einführen und hat dadurch ganz subtil die Möglichkeit, nebenbei in einer Eins-zu-Eins-Situation bei ausgewählten Kindern die entscheidenden Aspekte noch einmal zu thematisieren.

Das Gleiche findet statt, wenn Zählanlässe konkret durchgeführt und in ‚Gebäuden‘ dokumentiert und analysiert werden, wenn Rechenhandlungen in Notationen übersetzt oder beim operativen Zerlegungstraining automatisiertes Wissen aufgebaut wird. All diese Situationen sind so gestaltet, dass sie auf Perfektion zielen, aber diese nicht erfordern. Das wiederkehrende Geschehen[29] im Spiralprinzip sorgt dafür, dass Erfahrungen auf immer breiter werdender Grundlage immer tiefer verstanden und durchdrungen werden.

Dieser Unterricht nimmt ernst, was die Fachdidaktik als ‚aktiv-entdeckendes Lernen‘ (Wittmann, 1981; Müller, et al. Eds, 2004) fordert:

> *„‚Erwerben‘ anstelle von ‚Beibringen‘ und ‚Vermitteln‘. … Im „konstruktivistischen Curriculum“ sollen Kinder „ihr Wissen auf dem Hintergrund von eigenen Erfahrungen aufbauen können. Die aktive Teilnahme an Lernsituationen ist explizit gefragt.“*

[29] Beim Thema *‚reversible Bündelung‘* zeigt sich das Spiralprinzip wie folgt: 5er-Stangen und 5er-Münzen Mitte des ersten Schuljahres / Zehnerstange und Würfel beim ersten Kontakt mit dem Zehnerübergang Ende des ersten Schuljahres / Sortieren und Rechnen mit großen Anzahlen Mitte des ersten, Anfang des zweiten und Anfang des dritten Schuljahres beim Einstieg in den vierstelligen Zahlenraum / Übersetzung der Zehnerübergangsproblematik in den zweistelligen Zahlenraum auf der Grundlage von Zehnerstangen und zweifarbigen quadratischen Wendeplättchen sowie dessen Veränderung auf das Rechnen mit 10-Cent und 1-Cent Geldmünzen im zweiten Schuljahr bis hin zum ‚Rechnen mit Erbsen, Bohnen und Nudeln‘ auf der Stufe ‚symbolische Werte‘ oder gar am römischen Rechenbrett im dritten und vierten Schuljahr. Die Erfahrung der Rechenhandlung mit in Objekten erfahrbaren reversiblen Wertebenen wiederholt sich auf unterschiedlichem Abstraktionsniveau und in unterschiedlichen Zahlenräumen. Auch das ab Ende des ersten Schuljahres durchgeführte ‚Filtern von gemischten Päckchen‘ unterstützt die Auseinandersetzung mit der Zehnergrenze und im Bereich der Subtraktion den Aufbau des Konzepts vom reversiblen Zehner.

„Betonen der von Kindern selber entwickelten Strategien anstelle der Vermittlung von Standard-Algorithmen."

„Hauptaufgabe der geistigen Erziehung ist also mehr und mehr, das Denkvermögen auszubilden und nicht das Gedächtnis mit bloßen Inhalten auszustatten." (Piaget)

Im Blick auf die Arithmetik geht es um die *„Konzentration auf Grundideen". „Der Zahlenraum von 1-20 wird … als Ganzes angeboten und nach und nach ‚durchdrungen' und verinnerlicht. Dies geschieht mit der Argumentation, dass Teile immer nur in Verbindung mit dem Ganzen verstanden werden können.*

Beim aktiv-entdeckenden Lernen „werden komplexe Aufgaben angeboten, die eine vielfältige Bearbeitung zulassen und auf verschiedenen Schwierigkeitsniveaus bearbeitet werden können." (Moser Opitz, 2008, S.106-118)

‚Mathe inklusiv – Rechnen durch Handeln' ist ein Konzept, das diesem Spektrum zugeordnet werden muss, auch wenn die Erfahrungsfelder, in denen die Lernprozesse stattfinden, andere Inhalte haben bzw. anders aufgebaut sind, als bei Vertretern in der Tradition von Müller & Wittmann. (Müller et al. 1999, Wittmann, 1993; Wittman & Müller, 1993) Die Aktivierung beginnt z.B. nicht erst bei der Deutung von Zahlen und Rechenvorgängen, sondern bereits bei der Erzeugung von Zahlen, indem für den Einzelnen oder in der Klasse relevante Fragestellungen ausgewählt werden:

Werden aus kleinen Babys kleine Kinder? Nach wie vielen Tagen keimen die Bohnen? Wo wächst die Bohne: Oben oder unten? Wie viel Taschengeld bekommen andere Kinder meines Alters? Welches Spielzeugauto fährt am weitesten? Wohin wollen wir den nächsten Ausflug machen? Was ist die häufigste Automarke? Wer in der Klasse wohnt am höchsten über der Erde?

Das Konzept der konkreten Zahlen erlaubt es, praktisch jedes Problem in Zahl zu übersetzen und auf dieser Grundlage handelnd so zu erforschen, dass alle Beteiligten die gefundenen Ergebnisse deuten können. Es bindet die Kinder in einem sozialen Lernprozess zusammen und ist daher inklusiv. Es erlaubt, dass einzelne Kinder entsprechend ihrer kognitiven Möglichkeiten und ihres Lernstandes in diesem gemeinsamen Forschungsprozess ganz individuell ihre Vorstellungen entwickeln. Teils, indem sie diese Erfahrungen in ihre Deutungsmuster assimilieren. Teils indem sie ihre Deutungsmuster angesichts neuer Erfahrungen akkommodieren (Piaget, 1974, S. 153ff). Die Differenzierung ist in dem Sinne eine ‚natürliche' (Krauthausen und Scherer, 2144, S. 50ff.), als das komplexe Geschehen es erlaubt auf der Grundlage der jeweils möglichen Zugriffsweisen Erfahrungen zu sammeln und Einsichten zu gewinnen. Alle latent diskriminierenden und das Selbstwertgefühl untergrabenden Aspekte von Sonderbehandlung und expliziten Fördermaßnahmen entfallen. Auf Seiten der Kinder steht das Gemeinsame im Vordergrund. Das stärkt das Selbstbewusstsein und die Identität, gerade der Kinder mit schwachen Voraussetzungen.

Nach Piaget sind Kinder dann schon zu dezentriertem Denken fähig, „wenn eine Situation ihrer Erlebniswelt entspricht und die Aufgaben angepasst werden." (Moser Opitz, 2008, S. 45) Bedeutungsvolle Situationen beeinflussen das Interesse am Zählen, also am Festhalten des Kardinalaspekts, positiv. „Soziale Interaktionen werden insofern als wichtig erachtet, als sie ihren Beitrag zu bedeutungsvollen Situationen leisten können" (Moser Opitz, 2008, S. 99). Die „für den Zahlbegriffserwerb wichtige" Anzahlinvarianz wird nach Zwack-Stier und Börner (1998) in handlungsorientierten Kontexten von Kindern rasch erworben" (Moser Opitz, 2008, S. 98) Das Zählen mit konkreten Zahlen als eine Seite des Einstiegs in die Welt der Zahlen und des Rechnens ist in besonderem Maße geeignet, eine Unterrichtspraxis als Alltag zu etablieren, die diesen Erkenntnissen Rechnung trägt. Es ist geeignet, den verbalen Zählvorgang, da er sich auf ein homogenes Material bezieht, beständig mit gleichbleibenden kardinalen Botschaften zu unterlegen und daher den Schritt zu fördern, der das unreife Zahlwortreihenkonzept des Zählanfängers zu einem numerischen Zahlkonzept erhebt. Dies geschieht, weil die ‚numerosity' (Gelman & Galistel, 1978, S. 64ff, S. 219ff) der gegenständlichen Zahl als Ausgangspunkt schon vorhanden ist und nicht mehr konstruiert werden muss (Siehe Abb. 14). Das Motiv des Zählanlass stellt sicher, dass das Kind weiß, dass vor ihm nicht eine Menge von Würfeln liegt, sondern eine in der analogen Abbildung gefundene Zahl. Indem die Zahl gegenständlich verortet wird und Zahlwort und Zahlzeichen als Kommunikationsmittel nur angehängt werden, muss sie nicht erst durch ‚Veranschaulichung' kardinal und strukturiert aufgebaut werden. Sie ist es bereits in dem Maße, wie es die zuvor gelegte konkrete Zahl ist.

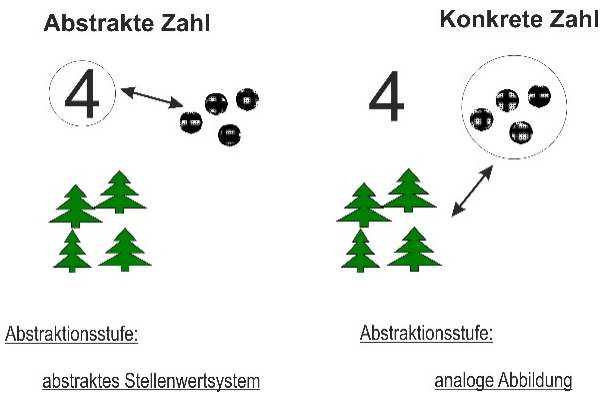

Abb. 14: Wo ist die Zahl?

‚Subitizing' als eine der beiden Formen der Zahlwortbestimmung bezieht sich hier von Anfang auf Zahlen! Die Zweifel Gelman & Galistels (1978, S. 64ff, S. 219ff) greifen nicht, da es gar nicht um das „low-level"-subitizing des ganz kleinen Kindes geht, also den Bereich der spontanen Mengenerfassung in kontextgebundenen Situationen, sondern von Anfang an um „high-level"-´subitizing, dessen numerische Qualität Gelman & Galistel (1978, S. 64ff, S. 203ff) beim Quasisimultanerfassen anerkennen. Letzteres zeigt numerosity, weil es auf der Grundlage eines erworbenen Zahlbegriffs genutzt wird. Gleiches gilt aus meiner Sicht für das Subitizing im Zahlenraum bis Vier, wenn dieses bei einer schon gebildeten konkreten Zahl für die Suche nach dem Zahlwort verwendet wird.

Die Einwände von Gelman & Galistel (1978) beinhalten indirekt ein Argument dafür, dass der verbale Zählprozess möglichst nicht an den Objekten der Wirklichkeit stattfinden sollte, sondern immer nur an schon gebildeten und in homogenes Material übersetzten Zahlen. Zahlwortreihen, die z.B. an Kastanien, Kindern der Klasse, Finger an der Hand erfolgen, zählen inhomogenes Material, das erst unter einem gewissen Blickwinkel unter Absehen von vielen Spezifika in ein kardinales Konzept übersetzt werden muss. Dieses Absehen von Sonderheiten der Einzelelemente ist eine Hürde, die Kindern mit schwachen Kompetenzen zu überwinden nicht leicht fällt. Sie interessieren sich vielleicht für die besonders glänzende Kastanie, ihre Freunde in der Klasse und der dicke Daumen ist auch nicht dasselbe wie der kleine Finger. Hier ist eben nicht alles Eins! Es muss erst zur Einheit gemacht werden. Das Risiko, dass Zahlwörter bestimmten Elementen zugewiesen werden oder das Ganze so weit vom Kardinalen absieht, dass der Zählanlass nur den Anstoß bildet, die Zahlwortreihe aufzusagen, ist dann groß.

Gerster & Schultz (2004, S. 43ff) betonen die Bedeutung des Teile-Ganzes-Prinzips und die Notwendigkeit, dass Zahlen hierfür als Zusammenfassungen (collectible unit) verstanden werden. Sie zeigen mit Verweis auf Brissiaud (Gerster & Schultz, 2004, S. 67ff) und auf Resnick (Gerster & Schultz, 2004, S. 78ff), dass figurative Muster und im kleinen Zahlenraum auch durch protoquantitative Wahrnehmung erfasste ungeordnete Mengen geeignet sind, Zahlen in diesem wichtigen Sinne zu verstehen. Dornheim geht in ihrem „Modell der Entwicklung von Zahlkonzept und Rechenleistung" (Dornheim, 2007, S. 86, S. 126) ebenfalls davon aus, dass es der ganz kleine Zahlenraum ist, der die Grundlage für das „erste Anzahlkonzept" legt, welches sich dann unter Einfluss der Zahlwortreihe und von Anschauungsmaterial zum Kardinalzahlkonzept und zum Teile-Ganzes-Prinzip entwickelt. Gelman & Galistel (1978) und Fuson (1988) konstatieren, dass im kleinen Zahlbereich mit größerer Sicherheit richtig geantwortet wird während Anzahlbestimmungen in größeren Zahlenbereichen schon bis Zehn und erst recht darüber fehleranfälliger sind. Dies unterstützt die Grundidee, in den ersten acht bis zehn Schulwochen das Konzept des Zahlbausteins vor allem in dem spontan wahrnehmbaren Bereich bis vier aufzubauen.

Das heißt nicht, dass man arithmetische Probleme in der Anfangsphase auf diesen Zahlenraum beschränkt. Im Gegenteil. Zählanlässe können wesentlich größere Zahlen bis in den großen zweistelligen Bereich erzeugen. Der Einstieg über Multiplikation und Division findet mit Aufgaben bis $4 \cdot 4$, also im Bereich bis 16 statt. Es geht nicht um die Aufgaben, sondern um die Form der Lösung. Rechenhandlungen und als Gebäude dargestellte Zahlen helfen, die wichtigen Zahlbausteine immer wieder in den Blick und ins Gespräch zu bringen. Und an der Stelle, wo es beim Rechnen wirklich auf das Ergebnis (und natürlich auf die operativen Zusammenhänge) ankommt, greift der Weg über die Subtraktion und über die Zerlegungen bis 5 genau dieses entwickelte Anfangswissen auf.

Eine weitere wesentliche fachdidaktische Änderung betrifft die veränderte Bedeutung, die dem Materialgebrauch zukommt. Wir sind gewohnt, Material und die Handlungen damit als Veranschaulichung der abstrakten Zahl oder des eigentlich abstrakten Rechenvorgangs zu betrachten (Lorenz, 1998). Vor dem Hintergrund unseres Zahlsystems werden diese Anschauungs- oder Veranschaulichungsmaterialien visuell nach Zehner und Einer gegliedert, wobei der Problematik der Wahrnehmungsgrenze durch Färbung oder andere Signale mit einer ergänzenden Fünferstruktur Rechnung getragen wird. Im Konzept ‚Rechnen durch Handeln', wird das Rechnen nicht veranschaulicht, sondern mit konkreten Zahlen handelnd durchgeführt. *Das Material wird als konkrete Zahl zum ‚Rechenmittel'!* Dabei zeigt sich, dass es einen großen Unterschied macht, ob das Rechenmittel aus (geordneten) Einer besteht oder ob es Bündelungen besitzt, also Objekte mit höherem Wert. Es macht ebenso einen Unterschied, ob diese Objekte ihren Wert wie bei Zehnerstangen materiell zeigen oder ob dieser, wie bei einer Geldmünze oder einer roten Bohne, die zur 100 erklärt wird, nur noch symbolisch vorhanden ist. Man handelt anders und denkt anders. Man lernt Unterschiedliches über die Vorgänge des Operierens. Je niedriger das Abstraktionsniveau ist, umso deutlicher sind die operativen Zusammenhänge und umso einfacher sind die, zur Not auch zählend durchführbaren Rechenprozesse. Je höher das Abstraktionsniveau ist, umso mehr wird der Rechnende gezwungen, Strukturen und Wertverhältnisse zu beachten. Dieser Aspekt wird auch in fachdidaktischen Veröffentlichungen aus dem Feld des aktiv entdeckenden Lernens aus meiner Sicht nicht genügend beachtet.[30]

Insbesondere bei der Subtraktion zeigt sich der Wert von Bündelungsobjekten, weil dabei der ‚reversible Zehner' unmittelbar erfahren werden kann. Das erlaubt es, den inneren Aufbau jenes bedeutsamen Zahlkonzepts zu fördern, dessen Fehlen nach Gerster & Schultz (2004) ein wesentliches Symptom rechenschwacher Kinder darstellt.

Dabei gilt auch hier wieder, dass es nicht vom Leichten zum Schweren geht und auch nicht vom Kleinen zum Großen, sondern dass die Impulse zur Auseinandersetzung mit den dezimalen Wertebenen immer wieder wechselnd mal auf höherem, mal auf niedrigem Abstraktionsniveau stattfinden, mal im größeren und dann wieder im kleineren Zahlenraum. Es geht nicht um einen Aufbau nach Stufen der Perfektion, sondern um einen Annäherungsprozess, bei dem die Thematik immer wieder neu beleuchtet wird. Dadurch und durch die eigene innere Entwicklung erscheint der gleiche Vorgang in immer neuen Licht. Dieses Prinzip des Wiederkehrens, wie es am Schultagezähler beschrieben wurde, wie es aber in gleicher Weise für das operative Zerlegungstraining, für das dezimale Ordnen, für das Rechnen mit Zehnerstangen und mit Geld oder den Einsatz des ‚Filterns' bei ‚gemischten Päckchen' oder auch beim Erwerb des Einmaleins genutzt wird, führt dazu, dass schwächere Schülerinnen und Schüler immer wieder aufs Neue die Chance des verständigen Einstiegs bekommen, während jene, die ‚die Sache eigentlich schon verstanden' haben, an ihrer Perfektion arbeiten. Denn auch das ist eine wichtige Erkenntnis: Rechenkompetenz zeigt sich in der Idee der Perfektion. Gerade weil wir von der Unvollkommenheit alles Menschlichen ausgehen, gibt es Sinn, an der Vervollkommnung zu arbeiten.

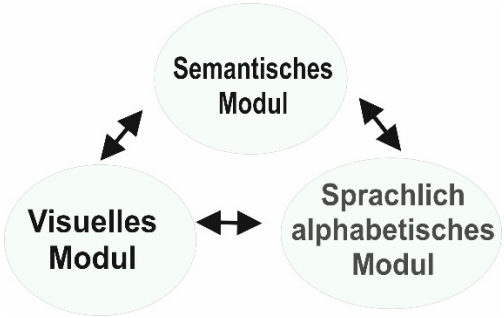

Abb. 15: Triple-Code-Modell nach Dehaene (1992)

[30] Im Zahlenbuch 1 und 2 (Wittmann & Müller 2012) finden sich z.B. 20er- und 100er-Felder, die gemeinsam mit Wendeplättchen verwendet werden. Diese nach Zehner und ‚Kraft der 5' strukturierten Materialien erlauben es, wesentliche Strukturen zu reflektieren und zu nutzen. Sie lassen es aber ebenfalls zu, dass diese ignoriert werden und ein Kind weiter vor allem an den Einer orientiert arbeitet. Gleiches gilt für den Rechenrahmen. Die Konsequenzen und die Chancen einer Arbeit mit Bündelungsobjekten wird meines Wissens nach nicht diskutiert.

Rechenkompetenz zeigt sich darin, dass die drei Module in Dehaenes Triple-Code-Modell gut miteinander vernetzt sind (Dehaene, 1992, S. 27ff; von Aster & Lorenz, 2005, S. 7ff). Die gleiche Dreiteilung findet sich auch bei Dornheim (2008, S. 86, S. 126). Immer geht es darum, dass visuelle und auditive Signale deshalb als strukturierte Zahlen wirken können, weil sie mit entsprechend strukturierten Vorstellungen des semantischen Moduls in Verbindung gebracht werden. „Die Tendenz, quantitative Vorstellungen und geschriebene Symbole nicht genügend zu vernetzen, scheint ein Haupthindernis, ein Stolperstein in der Schulmathematik zu sein (Resnick, 1992, S. 393).“ (zit. in: Gerster & Schultz 2004, S. 41). Ganz offensichtlich gelingt es der Schule trotz aller didaktischen Bemühungen nicht, das Zahlverständnis bei allen Kindern entsprechend zu entwickeln. These des hier dargestellten Konzepts ist es, dass die Ursache dafür hierin zu suchen ist, dass man, entsprechend dem Modell von Dehaene Zahlen nur in der Form als Zahlen anerkennt, wie wir sie heute kennen. Im Triple-Code-Modell ist alles Anschauliche verschwunden. Es muss künstlich didaktisch eingebracht werden. Sehr schön sieht man diese Notwendigkeit bei Dornheim (2007), die ihre erste Grafik (S.86) später um genau jenen Bereich ergänzt (S.126), um die offenkundige Lücke zu schließen.

Geht man dagegen vom Konzept der konkreten Zahl aus und fragt sich, wie dieses Zusammenspiel der drei mentalen Module zu Beginn der kulturgeschichtlichen Zahlentwicklung ausgesehen hat, so bekommt Dehaenes Triple-Code-Modell eine andere Gestalt. (Abb. 16) Im Zentrum steht nun die konkrete Zahl, die sich mit dem visuellen und dem semantischen Modul überschneidet. (Vergl. Wittmann, 1981, S. 89) Die semantischen Vorstellungen bilden sich an den geschaffenen Zahlen, die in Teilen (an Kerbhölzern) zugleich als Zahlzeichen wirken. Die Sprache benennt zunächst unscharf Mengen (wenig/viel) oder scharf, aber allgemein: ‚So viele!‘. Im ganz kleinen Bereich entstehen Eins, Zwei und Drei als erste Zahlworte. Diese bezeichnen aber zunächst, ähnlich eines Nomens, einfach Unterschiedliches und werden noch nicht als Anfang einer fortzusetzenden Reihe verstanden. Dehaenes Triple-Code ist als autonomes Netzwerk erst in Anfängen vorhanden.

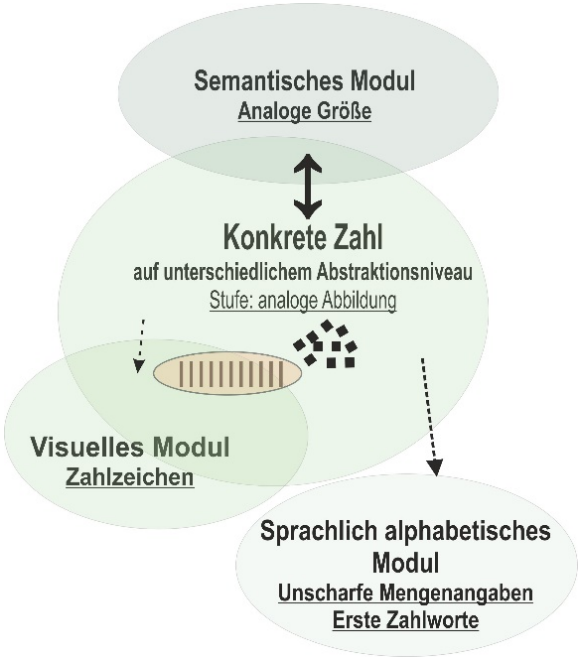

Abb. 16: Kulturhistorisch erweitertes Triple-Code-Modell/Stufe Steinzeit

Die Zahlwortreihe, erst recht die dezimal gegliederte Reihe, entsteht, wie auch Symbolschriften, die Zahlen festhalten, kulturgeschichtlich im Zusammenhang mit den Veränderungen der konkreten Zahlen und Rechenmittel. (Menninger 1958a).

Geht man in der Kulturgeschichte weiter voran bis in die Zeit des Mittelalters, so findet man, dass sich visuelles, semantisches und sprachlich alphabetisches Modul ausdifferenziert haben. Sie sind eigenständiger geworden und können nun Zahlen ganz anderer Größenordnungen fassen und darstellen. Aber sie bleiben weiter auf die Wechselwirkung mit konkreten Zahlen angewiesen. (Abb. 17)

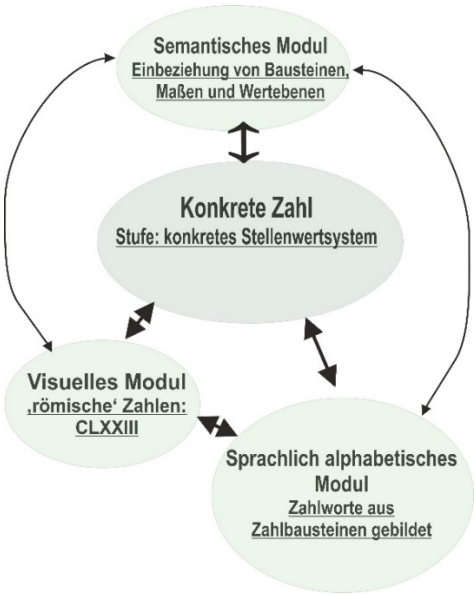

Abb. 17: Kulturhistorisch erweitertes Triple-Code-Modell/Stufe Mittelalter

Nirgends im europäischen Raum wurde mit abstrakten Zahlen gerechnet. Rechenvorgänge waren weiterhin Handlungsvorgänge an Repräsentanten für Wertebenen. Im osteuropäischen und ostasiatischen Raum blieb dieses handelnde Rechnen auf den Linien, mit einem Rechenbrett oder Rechenrahmen, bis Anfang des 20. Jahrhunderts kulturelle Tradition (Menninger, 1958b; Ifrah, 1987). Das semantische Modul war für das Rechnen weiter auf die Handlung mit konkreten Zahlen angewiesen, was sich in den diese Zahlbausteine deutlich zeigenden Zahlzeichen ebenso niederschlug wie in der hybriden Gestaltung größerer Zahlworte wie ‚neunmal Tausend'. Erst auf dieser Grundlage findet am Ende des Mittelalters der Übergang zu unseren Stellenwertzahlen und zu den damit verbundenen halbschriftlichen und schriftlichen Rechenverfahren statt. Es bedurfte eines mehrere tausend Jahre währenden kulturellen Prozesses von Rechenhandlungen im Stellenwertsystem bis das operative und strukturelle Wissen so weit aufgebaut war, dass auf konkrete Repräsentanten verzichtet werden konnte[31], sodass das moderne Zahlverständnis heute allein aus dem Zusammenspiel der in Dehaenes Triple-Code genannten drei Module erwachsen kann (Abb. 15).

Die kulturgeschichtliche Entwicklung zeigt die hohen Hürden, die das Stellenwertsystem unserer Zahlen dem Rechenanfänger in den Weg stellt. Gleichzeitig zeigt sie, dass Rechnen mit konkreten Zahlen auch in der Schule eine Verständnisbrücke sein kann, um an den Handlungserfahrungen strukturierte Vorstellungen aufzubauen. Der Weg muss, wie in der Kulturgeschichte von der sich aufbauenden Erfahrung zum sich entwickelnden Zahlkonzept führen. Am kulturellen Ende, bei unserer Zahlwortreihe und deren Schreibung als Stellenwertzahl zu beginnen, zäumt das Pferd von der falschen Seite auf und entspricht nicht dem genetischen Grundkonzept. Damit schaffen wir – so ist die These – bei einem Teil der Schülerschaft das Problem, das wir trotz aller nachträglicher Veranschaulichung offensichtlich nicht in den Griff bekommen.

Literatur

Damerow, P. & Schmidt, S., (2004). Arithmetik im historischen Prozess: Wie „natürlich" sind die „natürlichen Zahlen"?. Müller, G.N., et al. (Eds.) *Arithmetik als Prozess* (S. 133-182). Seelze: Kallmeyer-Verlag.

Dehaene, S. (1992). Varieties of numercial abilities. *Cognition (44),* 1-42.

Dehaene, S. (1999). *Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können*. Basel: Birkhäuser.

Dornheim, D. (2008). *Prädiktion von Rechenleistung und Rechenschwäche*. Berlin: Logos Verlag.

[31] „With the mastery of a positional system such as arabic notation comes the ability to calculate, that is, to predict by symbolic manipulation the result of a physical regrouping or partitioning act without having to execute it." (Dehaene, 1992, S. 6)

Elias, N. (1976). *Über den Prozess der Zivilisation Bd. 1/2*. Frankfurt: Suhrkamp.

Feuser, G. (2013). Kooperation am gemeinsamen Gegenstand. In: Feuser, G. et.al. (Eds.) *Enzyklopädisches Handbuch der Behindertenpädagogik*, *Bd. 7* (S. 282-293). Stuttgart: Kohlhammer-Verlag.

Fromme, M (2015). *Stellenwertverständnis im Zahlenraum bis 100.* Wiesbaden: Springer-Spektrum.

Führer, L. (1997). *Pädagogik des Mathematikunterrichts.* Stuttgart: Vieweg.

Fuson, K. (1988). *Childrens Counting and Concepts of Number*. New York: Springer Verlag

Gaidoschik, M. et al. (2015). Einige Fragen zur Didaktik der Erarbeitung des „Hunderterraumes*". Journal für Mathematik-Didaktik 36(1)*, S. 163-190.

Gaidoschik, M., et.al. (2017). Empirische Befunde zum Lehren und Lernen auf Basis einer Fortbildungsmaßnahme zur Förderung nicht-zählenden Rechnens. *Journal für Mathematik-Didaktik 38(1),* 93-124.

Gelman, R. & Gallistel, C.R. (1978). *The Child's Understanding of Number.* Cambridge: Farvard University Press.

Gerster, H.D., & Schultz, R. (2004). *Schwierigkeiten beim Erwerb mathematischer Konzepte im Anfangsunterricht.* https://phfr.bsz-bw.de/frontdoor/deliver/index/docId/16/file/gerster.pdf

Gläss, Th. (Ed.) (1961). *Pädagogik vom Kinde aus*. Weinheim: Beltz.

Ifrah, G. (1987). *Die Universalgeschichte der Zahlen.* Frankfurt: Campus.

Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014) *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Hannover: Klett/Kallmeyer.

Lorenz, J.H. (1998). *Anschauung und Veranschaulichungsmittel im Mathematikunterricht.* Göttingen: Hogrefe.

Lorenz, J.H. (2017). Einige Anmerkungen zur Repräsentation von Wissen über Zahlen. *Journal für Mathematik-Didaktik 38(1)*, 125-139.

Menninger, K. (1958a). Zahlwort und Ziffer, Band I: *Zählreihe und Zahlsprache.* Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Menninger, K. (1958b). Zahlwort und Ziffer, Band II: *Zahlschrift und Rechnen.* Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Menninger, K. (1979). *Zahlwort und Ziffer – Eine Kulturgeschichte der Zahl.* Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Meyerhöfer, W. (2011). Vom Konstrukt der Rechenschwäche zum Konstrukt der nicht bearbeiteten stofflichen Hürden (nbsH). *Pädagogische Rundschau, 4/2011*, 401-426.

Moser-Opitz, E. (2008). *Zählen – Zahlbegriff – Rechnen.* Bern: Haupt Verlag.

Müller, G.N., et al. (1999). Das Konzept von ‚Elementarmathematik als Prozess'. Müller, G.N., et al. (Eds.) *Arithmetik als Prozess* (S. 11-18). Seelze: Kallmeyer-Verlag.

Piaget, J. (1974). *Theorien und Methoden der modernen Erziehung.* Frankfurt: Fischer TB Verlag.

Rödler, K. (1987). *Vergessene Alternativschulen.* München: Juventa.

Rödler, K. (1997). Rechnen am römischen Rechenbrett. *Grundschule 11/1997*, 62-66.

Rödler, K. (1998). Auf fremden Wegen ins Reich der Zahlen. *Grundschule 5/1998*, 45-47.

Rödler, K. (2006a). *Erbsen, Bohnen, Rechenbrett – Rechnen durch Handeln.* Velber: Kallmeyer Verlag.

Rödler, K. (2006b). Rechnen mit konkreten Zahlen. *Behindertenpädagogik 1/2006*, 59-67

Rödler, K. (2007). *Die rot-blauen Würfel und Fünferstangen – Rechnen durch Handeln*. Velber: Kallmeyer Verlag.

Rödler, K. (2010). Dyskalkulieprävention durch das Rechnen mit Bündelungsobjekten. *Sache-Wort-Zahl (114),* 44-48

Rödler, K. (2015). Ein Mathematikunterricht für alle!-Schulische Inklusion braucht eine inklusive Fachdidaktik. *Behindertenpädagogik 4/2014*, 399-412

Rödler, K. (2016a). *Mathe inklusiv: Ratgeber für die 1./2. Klasse*. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016b). *Mathe inklusiv: Zahlverständnis und Operationen*. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016c). *Mathe inklusiv: Zehnerübergang im Zahlenraum bis 20*. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016d). *Mathe inklusiv: Rechnen im Zahlenraum bis 100*. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016e). *Mathe inklusiv: Einmaleins und Geometrie*. Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2016f). *Mathe inklusiv: Projekte für die Klasse 1./2.* Hamburg: AOL-Verlag.

Rödler, K. (2019). Rechnen durch Handeln – 16 fachdidaktische Videos. *Mitteilungen der GDM (106)*, 17-21

Rödler, K. (2020a). *Youtube-Playlist ‚Rechenprobleme,* https://www.youtube.com/watch?v=HLuGvkXe9dk&list=PLKv_eZxHfHWVVLRdcb52r81_udHnAEzwF

Rödler, K. (2020b). *https://www.matheinklusiv.de*

Rumpf, H. (1981). *Die übergangene Sinnlichkeit.* München: Juventa.

Seifert, M., & Nagel, H. (1977). *Nicht für die Schule leben.* Frankfurt: päd.extra Buchverlag.

Toeplitz, O. (1927). Das Problem der Universitätsvorlesungen über Infinitesimalrechnung und ihre Abgrenzungen gegenüber der Infinitesimalrechnung an den höheren Schulen. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (36), 88-100

Von Aster, M., & Lorenz, J.H. (Eds.) (2005). *Rechenstörungen bei Kindern.* Göttingen: Vandenhoeck&Ruprecht.

Von Hentig, H. (1985). Wie frei sind freie Schulen? Stuttgart: Klett-Cotta.

Wagenschein, M. (1970). *Verstehen lehren / genetisch-sokratisch-exemplarisch*. Weinheim: Julius Beltz.

Wittmann, E. (1981). *Grundfragen des Mathematikunterrichts.* Stuttgart: Vieweg.

Wittmann, E. & Müller, G. (1993). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1 Vom Einspluseins zum Einmaleins.* Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. (1993). Wider die Flut der “bunten Hunde” und “grauen Päckchen”: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des Produktiven Übens. In Wittmann, E. & Müller G., *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1.*, (S. 157-171). Stuttgart: Klett.

Wittmann, E. & Müller, G. (2012). *Das Zahlenbuch, Band 1/2.* Stuttgart: Klett.

Zaslavsky, C. (1999). *Africa Counts – Number and Patterns in African Culture.* Chicago: Lawrence Hill Books.

Adresse des Autors:
Dr. Klaus Rödler
Reuterweg 69
D-60323 Frankfurt am Main
klaus.roedler@onlinehome.de